БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 519.21

ПАВЛИВ
Дмитрий Александрович

НЕАФФИННЫЕ МОДЕЛИ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ ДОХОДНОСТИ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.05 – теория вероятностей
и математическая статистика

Минск, 2018

Работа выполнена в Белорусском государственном университете.

Научный руководитель –	**Медведев Геннадий Алексеевич,** доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики Белорусского государственного университета.
Официальные оппоненты:	**Маталыцкий Михаил Алексеевич,** доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры фундаментальной и прикладной математики УО «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»;
	Аксень Эрнест Маврициевич, доктор экономических наук, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры математических методов в экономике УО «Белорусский государственный экономический университет».
Оппонирующая организация –	УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».

Защита состоится 15 марта 2019 года в 10.00 на заседании совета по защите диссертации Д 02.01.07 при Белорусском государственном университете по адресу: г. Минск, ул. Ленинградская, 8 (корпус юридического факультета), ауд. 407, тел. ученого секретаря: (017) 209-57-09.

Почтовый адрес: 220030, г. Минск, пр-т Независимости, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан «11» февраля 2019 года.

Ученый секретарь совета
по защите диссертации Д 02.01.07
кандидат физ.-мат. наук доцент Е. М. Радыно

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время задачи и методы теории вероятностей и математической статистики оказались полезными для решения широкого круга задач в различных приложениях. Ярким подтверждением этого является фундаментальный обзор А. Н. Ширяева[1] по использованию вероятностных методов для математического моделирования и решения проблем финансового рынка. Знаменательно то, что стохастическая финансовая математика не только широко использует вероятностные постановки и решения, но и сама является побудительным мотивом формулировать новые вероятностные задачи. Развитию данного направления и посвящена настоящая диссертация.

Характеристики финансовых инструментов основываются на свойствах процентных ставок, случайное изменение во времени которых принято описывать с помощью стохастических дифференциальных уравнений. В связи с этим и характеристики финансового рынка, как функции процентных ставок, также моделируются случайными процессами. В качестве эталонного финансового актива в финансовой математике принято использовать так называемые бескупонные облигации, цены которых вычисляются как условные математические ожидания определенных стохастических функционалов. Зависимость цен облигаций от срока до погашения, называемая временной структурой доходностей, является одной из самых востребованных характеристик долговых инструментов. Как следствие вышесказанного, все модели, рассматриваемые в диссертационной работе, являются стохастическими и описываются стохастическими дифференциальными уравнениями, решениями которых являются диффузионные случайные процессы.

Классическими в данной области считаются аффинные модели поведения процентных ставок, когда функции дрейфа и диффузии стохастического дифференциального уравнения процентной ставки – аффинные относительно значения процентной ставки. В этом случае временная структура доходности также является аффинной относительно значения процентной ставки. Первые такие стохастические модели были описаны более трех десятилетий назад в работах Васичека[2], Кокса, Ингерсолла и Росса[3] (далее – модель CIR) и других авторов. Идея того, что аффинные модели связаны с аффинными функциями дрейфа и диффузии впервые представлена в модели CIR и формально доказана

[1] *Ширяев, А. Н.* Основы стохастической финансовой математики : в 2 т. / А. Н. Ширяев. – Москва: Фазис, 1998. – 2 т.

[2] *Vasicek, O. A.* An equilibrium characterization of the term structure / O. A. Vasicek // Journal Of Finance. – 1977. – № 5. – P. 177-188.

[3] *Cox, J. C. A* Theory of the term structure of interest rates / J. C. Cox, J. E. Ingersoll, S. A. Ross // Econometrica. – 1985. – № 53. – P. 385-407.

Даффи и Каном[4] (далее – модель DK). Модель DK представляет собой обобщенную аффинную модель, частными случаями которой являются модели Васичека и CIR.

В силу своей простоты упомянутые выше аффинные модели позволяют найти в явном виде маргинальные и переходные плотности вероятностей случайного процесса процентной ставки, а также процесса стоимости бескупонной облигации. Это делает их привлекательными с точки зрения вероятностного анализа и применения на практике. Однако, как показывают многочисленные исследования, такие модели не могут с необходимой точностью описать временную структуру доходности, существующую на реальном финансовом рынке.

Поэтому в последнее время развитие диффузионных моделей процентных ставок идет в двух направлениях: увеличение размерности моделей и отказ от аффинных свойств. Так, в работе Фонга и Васичека[5] рассматривается двумерная аффинная модель с некоррелируемыми факторами: в качестве первого фактора модели выступает, как и ранее, случайный процесс мгновенной процентной ставки, вторым фактором является случайный процесс ее стохастической волатильности. Лонгстафф и Шварц[6] предложили рассматривать процентную ставку как суперпозицию нескольких случайных переменных состояния. Однако несмотря на все попытки модернизировать существующие аффинные модели, все больше исследователей приходят к выводу, что случайное поведение процентных ставок в действительности имеет неаффинную структуру. Например, в работе Эйт-Сахалия[7] на основе анализа реальных данных финансового рынка делается вывод о нелинейном поведении функций дрейфа и диффузии случайного процесса мгновенной процентной ставки.

Стохастическая квадратичная модель временной структуры доходности, описанная в работах Константинидиса[8], Ана и Дитмара[9], а также Лейполда и Ву[10], является одной из наиболее известных среди стохастических моделей неаффинного типа и включает в себя модели аффинного класса как частный

---

[4] *Duffie, D.* A yield-factor model of interest rate / D. Duffie, R. Kan // Mathematical Finance. – 1996. – № 4. – P. 379-406.
[5] *Fong, H. G.* Fixed-income volatility management / H. G. Fong, O. A. Vasicek // The Journal of Portfolio Management Summer. – 1991. - № 17 (4). – P. 41-46.
[6] *Longstaff, F.* Interest rate volatility and term structure: A two-factor general equilibrium model / F. Longstaff, E. S. Schwartz // Journal Of Finance. – 1992. – № 47. – P. 1259-1282.
[7] *Aït-Sahalia, Y.* Testing continuous-time models of the spot interest rate / Y. Aït-Sahalia // The Review of Financial Studies. – 1996. – № 2. – P. 385-426.
[8] *Constantinides, G. M.* A theory of the nominal term structure of interest rates / G. M. Constantinides // The Review of Financial Studies. – 1992. – № 4. – P. 531-552.
[9] *Ahn, D.* Quadratic Term Structure Models: Theory and Evidence / D. Ahn, R. Dittmar, A. Gallant. – New Orleans: AFA, 2001. – 52 p.
[10] *Leipold, M.* Asset Pricing under the Quadric Class / M. Leipold, L. Wu // Journal Of Finance. – 2002. – № 37. – P. 271-295.

случай. Основная сложность данной модели заключается в том, что она задается неким случайным процессом, экономическая природа которого неизвестна, но который определяет случайный процесс процентной ставки. Несмотря на то, что квадратичные модели известны уже несколько десятилетий, существует не так много работ, посвященных исследованию свойств ее функций временной структуры доходности.

Еще одним примером неаффинных моделей является модель, предложенная в работе Ана и Гао[11]. В ней дрейф случайного процесса мгновенной ставки является квадратичной функцией от r, где r – мгновенная процентная ставка, а волатильность согласуется с эмпирическими результатами[7] и пропорциональна $r^{3/2}$.

Одним из способов нахождения цен бескупонных облигаций в моделях, где процентные ставки описываются диффузионными процессами, является использование стохастического представления Фейнмана-Каца для решения дифференциального уравнения в частных производных с коэффициентами, совпадающими с функциями дрейфа и волатильности диффузионного процесса процентных ставок. В общем случае, задача получения явного вида для стоимости бескупонной облигации в моделях, задающихся нелинейным стохастическим дифференциальным уравнением, является нетривиальной.

Таким образом, исследование свойств перспективных вероятностных моделей временной структуры доходности процентных ставок, таких как стохастическая квадратичная модель, а также проблема нахождения стоимости бескупонной облигации на основе стохастического представления Фейнмана-Каца в таких случайных моделях, является важной и актуальной задачей.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами (проектами) и темами

Тема диссертации соответствует направлению научных исследований «Разработка и исследование математических методов и их применение для решения актуальных проблем естествознания, техники, экономики и социальных наук» (ГПНИ «Конвергенция»), определенной Перечнем государственных научных исследований на 2011-2015 годы, а также подпрограмме «Методы математического моделирования сложных систем» (ГПНИ «Конвергенция-2020»), определенной Перечнем государственных научных исследований на 2016-2020 годы.

[11] *Ahn, D.* A parametric nonlinear model of term structure dynamics / D. Ahn, B. Gao // The Review of Financial Studies. – 1999. – № 4. – P. 721-762.

Цель и задачи исследования

Целью диссертационной работы является исследование свойств и закономерностей стохастической квадратичной модели временной структуры доходности процентных ставок, а также определение стоимости бескупонных облигаций в различных диффузионных моделях процентных ставок на основе вероятностного представления Фейнмана-Каца. Для достижения поставленных целей необходимо решить следующие задачи:

1. Исследовать свойства и закономерности стохастической квадратичной модели доходности.
2. Определить явные аналитические выражения для функций временной структуры доходности в стохастической квадратичной модели.
3. Исследовать гибридные стохастические модели временной структуры доходности на примере стохастической модели «квадратичная, Даффи-Кана».
4. Определить стоимость бескупонной облигации в диффузионной модели CIR 1980, используя вероятностное представление Фейнмана-Каца.
5. Исследовать возможность использования теории групп симметрий Ли для алгоритмизированного определения стоимости бескупонных облигаций для различных диффузионных моделей процентных ставок.

Объектом исследования являются стохастические модели временной структуры доходности процентных ставок. Предмет исследования – условные математические ожидания стохастических функционалов, определяющие функции временной структуры доходности.

Научная новизна

В диссертации развита теория стохастических неаффинных моделей временной структуры доходности: впервые получены выражения функций временной структуры для некоторых частных случаев квадратичной модели. В случае, когда свойства модели рассматриваются в нейтральной к риску вероятностной постановке установлена и исследована зависимость формы функций временной структуры доходности от величины процентной ставки, установлены границы множества допустимых кривых доходностей и форвардных кривых, исследованы свойства и закономерности гибридной стохастической модели «квадратичная, Даффи Кана». Для различных диффузионных моделей временной структуры доходности получены новые представления стоимости бескупонной облигации.

Положения, выносимые на защиту

1. Явные аналитические выражения функций временной структуры доходности для ряда квадратичных диффузионных моделей. Аналитическое приближение функций временной структуры для случая зависимых случайных процессов, описывающих состояние рынка.
2. Корреляционная функция случайных процессов волатильности доходности и наклона форвардной кривой диффузионной квадратичной модели.
3. Границы множества допустимых кривых доходностей и форвардных кривых, достаточные условия возрастания, убывания, наличия точек экстремума форвардной кривой в риск-нейтральной вероятностной постановке диффузионных моделей «квадратичная» и «квадратичная, Даффи-Кана».
4. Новые представления для стоимости бескупонной облигации некоторых диффузионных моделей процентных ставок. Аналитическая аппроксимация условного математического ожидания, совпадающего со стоимостью бескупонной облигации диффузионной модели CIR 1980.

Личный вклад соискателя ученой степени

Результаты, выносимые на защиту, получены соискателем самостоятельно. Вклад научного руководителя состоит в постановке задач и обсуждении результатов. Результаты работы [3], опубликованной совместно с научным руководителем, получены в неразрывном сотрудничестве. Остальные работы выполнены соискателем самостоятельно и опубликованы без соавторов.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Результаты диссертационной работы были апробированы на следующих конференциях: XVIII Республиканская научно-практическая конференция молодых ученых (Брест, 13 мая 2016 г.), Международная научно-практическая конференция «IV международные научные чтения (памяти А. К. Нартова)» (Москва, 19 ноября 2016 г.), XIII Международная научная конференция молодых ученых «Молодежь в науке – 2016» (Минск, 22-25 ноября 2016 г.), XV Международная научная конференция «Достижения и проблемы современной науки» (Санкт-Петербург, 11 января 2017 г.).

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 13 научных работах. Из них 9 статей в научных журналах в соответствии с пунктом 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (общим объемом 4,35 авторских листа), 4 статьи в сборниках материалов научных конференций.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из перечня сокращений и условных обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения и библиографического списка. Полный объем диссертации составляет 152 страницы, в том числе 28 рисунков, занимающих 14 страниц, 2 таблицы на 1 странице. Библиографический список содержит 58 наименований, включая 13 собственных публикаций соискателя ученой степени.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ

В **первой главе** даны основные определения, а также приведен аналитический обзор литературы по теме исследования стохастических моделей временной структуры процентных ставок, описаны основные достижения в указанной области, отмечены неразрешенные проблемы, а также определены основные направления исследований по рассматриваемой тематике.

Наиболее популярными вероятностными моделями динамики процентных ставок являются модели диффузионного типа, в которых процентная ставка эволюционирует во времени согласно диффузионному случайному процессу $r(t)$, удовлетворяющему стохастическому дифференциальному уравнению

$$\mathrm{d}r(t) = \eta\big(t, r(t)\big)\mathrm{d}t + \rho\big(t, r(t)\big)\mathrm{d}W(t), \quad t > t_0,\, r(t_0) = r_0,$$

где $\eta(t, r(t))$ и $\rho(t, r(t))$ – функции дрейфа и волатильности случайного процесса $r(t)$ соответственно, $W(t)$ – винеровский процесс, r_0 – значение случайного процесса $r(t)$ в начальный момент времени t_0.

Диффузионная модель процентных ставок называется *аффинной*, если функции дрейфа, $\eta(t, r(t))$, и диффузии, $\rho^2(t, r(t))$, стохастического дифференциального уравнения процентной ставки – аффинные относительно значения процентной ставки. Иначе – модель называется *неаффинной*.

В **главе 2** решены **задачи 1**, **2** и **3**. В **разделе 2.1** дано определение стохастической квадратичной модели временной структуры доходности процентных ставок, относящейся к неаффинному типу. Математически эквивалентное, но более компактное описание квадратичной модели предложено в **разделе 2.2** [3] (здесь и далее, верхний индекс T означает транспонирование):

$$\mathrm{d}X(t) = K\big(\theta - X(t)\big)\mathrm{d}t + S\mathrm{d}W(t), \quad t > t_0,\ X(t_0) = X_0, \tag{1}$$

$$r(t) = r(X(t)) = r_{\min} + X^{\mathrm{T}}(t)\Phi X(t), \quad X(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1},\ r_{\min} \in \mathbb{R},\ \Phi \in \mathbb{R}^{n\times n}, \tag{2}$$

где n-мерный случайный процесс $X(t)$ описывает пространство состояний финансового рынка, n-мерные векторы K, θ и матрицы S, Φ, а также скалярная величина $r_{\min}$, определяющая минимальное значение процентной ставки, – параметры модели. При этом считается, что состояние финансового рынка, случайный вектор $X(t)$, непосредственно не наблюдается, а процентная ставка $r(t)$ – наблюдаемый случайный процесс.

В стохастической финансовой математике цены активов (акций, облигаций и других финансовых контрактов) определяются как условные математические ожидания определенных стохастических функционалов. Пусть в момент исполнения s контракт гарантирует инвестору доход $\pi(s, X(s))$, $X(s)$ – случайный вектор состояния финансового рынка, а процентная ставка $r(u)$, $u \le s$, – случайный диффузионный процесс

$$\mathrm{d}r(u) = \eta\big(u, r(u)\big)\mathrm{d}u + \rho\big(u, r(u)\big)\mathrm{d}W(u), \quad u > t_0,$$

где $\eta(u, r(u))$ и $\rho(u, r(u))$ – функции дрейфа и волатильности случайного процесса $r(u)$ соответственно. Тогда цена такого актива с датой исполнения T в момент t, $t \le T$, вычисляется по формуле

$$\mathrm{E}_{t,r}\left[\int_t^T \mathrm{e}^{-\int_t^s r(u)\mathrm{d}u}\pi\big(s, X(s)\big)\mathrm{d}s + \mathrm{e}^{-\int_t^T r(u)\mathrm{d}u}\pi\big(T, X(T)\big)\right], \tag{3}$$

где математического ожидания (3) является условным и вычисляется при фиксированных значениях t и $r(X(t)) = r(X) = r$.

Когда $\pi(s, X(s)) = 0$ для $s < T$, актив называется бескупонной облигацией, а его цена в фиксированный момент t обозначается $P(r(X), t; T)$. Если эту цену рассматривать как функцию переменной t и, соответственно, случайного процесса $r(X(t))$, тогда согласно стохастическому анализу Ито, цена облигации, $P(r(X(t)), t; T)$, как функция времени, также является случайным процессом диффузионного типа.

Доказано[12], что если процесс

[12] *Oksendal, B.* Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications. / B. Oksendal. – Berlin: Springer-Verlag, 1998. – 324 p.

$$\rho\big(u,r(u)\big)\frac{\partial P\big(r,u;T\big)}{\partial r}$$

квадратично интегрируем, то условное математические ожидание (3) стохастического функционала существует и является решением так называемого уравнения временной структуры, которое, для квадратичной модели (1)-(2) принимает вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial P}{\partial X^{\mathrm{T}}}K(\theta-X)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\frac{\partial^2 P}{\partial X\partial X^{\mathrm{T}}}\sigma\sigma^{\mathrm{T}}\right)-r(X)P(r(X),t;T)=\frac{\partial P}{\partial X^{\mathrm{T}}}\sigma\Lambda(X),\\ P(r(X),T,T)=1,\end{gathered} \tag{4}$$

где $\Lambda(X)$ – вектор-функция, характеризующая рыночную стоимость риска. Представление (3)-(4) называется стохастическим представлением Фейнмана-Каца.

Чаще всего для представления временной структуры процентных ставок доходности используют кривую доходности $y(\tau, X)$ или форвардную кривую $f(\tau, X)$, которые, согласно определениям, выражаются через цену бескупонной облигации по формулам

$$y\big(\tau,X\big)=-\frac{\ln P\big(r\big(X\big),t;t+\tau\big)}{\tau},\quad f\big(\tau,X\big)=-\frac{\partial\ln P\big(r\big(X\big),t;t+\tau\big)}{\partial\tau}$$

Известно, что в стохастической квадратичной модели (1)-(2) решение уравнения (4) будет иметь вид

$$P(r(X),t;T)=P(r(X),t;t+\tau)=\exp\Big(-X^{\mathrm{T}}A(\tau)X-X^{\mathrm{T}}B(\tau)-C(\tau)\Big), \tag{5}$$

где T – дата погашения, $\tau = T - t$ – срок до погашения облигации, а функции $A(\tau)$, $B(\tau)$ и $C(\tau)$ подлежат определению.

Безусловное математическое ожидание и дисперсия случайного процесса $r(X(t))$ найдены в **теоремах 2.1** и **2.2** соответственно. В **теореме 2.3** вычислено предельное значение кривых при $\tau \to \infty$, а также показано, что оно не зависит от начального значения случайного процесса $X(t)$.

Одномерная стохастическая квадратичная модель детально исследована в **разделе 2.3**. В **леммах 2.2 – 2.4** [2] найден точный вид функций $A(\tau)$, $B(\tau)$ и $C(\tau)$, что позволяет записать в явном виде решение уравнения (4). Свойства функций временной структуры доходности сформулированы в виде теорем. Так, в **теореме 2.4** [1] найдено необходимое условие неотрицательности кривой доходности и форвардной кривой, накладываемое на параметры модели. В **теореме 2.5** [1] определено поведение кривых при малых сроках до погашения. Достаточные условия монотонного возрастания и убывания форвардной кривой, а также наличия точек экстремума в зависимости он начального значения случайного процесса процентной ставки для частного случая модели определяются **теоремами 2.6**, **2.7** и **2.8** [2] соответственно.

Зафиксируем в $y(\tau, X)$ срок до погашения, τ, и рассмотрим $y(\tau, X)$ как случайный процесс, порожденный функциональным преобразованием стохастического диффузионного процесса $X(t)$. В **теореме 2.9** [2], в данном контексте, показано, что функция корреляции случайного процесса волатильности доходности и наклона форвардной кривой для всех сроков погашения τ равна минус единице, т.е. данные характеристики связаны между собой линейным соотношением.

В **разделе 2.4** исследуется многомерная стохастическая квадратичная модель в условиях следующих упрощающих предположений [3]:

Предположение 1. Случайный процесс латентных переменных $X(t)$, является нормальным процессом с нулевым стационарным математическим ожиданием $\theta = 0$.

Предположение 2. Вероятностные свойства случайного процесса процентной ставки $r(X)$ рассматриваются в риск-нейтральной постановке.

Предположение 3. Латентные переменные, составляющие случайный вектор $X(t)$, являются независимыми случайными процессами.

В условиях введенных предположений в **леммах 2.5** и **2.6** [3] находятся выражения для функций $A(\tau)$, $B(\tau)$ и $C(\tau)$, что позволяет записать решение уравнения (4) в явно виде.

В стохастической квадратичной модели одно и то же значение процентной ставки r может быть получено для некоторого набора различных переменных случайного состояния X. Интересно исследовать разнообразие кривых, соответствующих одному и тому же начальному значению случайного процесса процентной ставки. Основные результаты данного раздела сформулированы в следующих теоремах.

Теорема 2.10.[3] Ширина полосы, в которой лежат все возможные допустимые кривые доходности $Y(\tau|z,\varphi)$ при фиксированном значении случайного процесса процентной ставки r и заданной матрице Φ равна:

$$\Delta_Y = Y_{\max}(\tau|z,\varphi) - Y_{\min}(\tau|z,\varphi) = \frac{r - r_{\min}}{\tau}\left(\frac{1}{v_M \operatorname{cth}(v_M\tau) + k_M} - \frac{1}{v_m \operatorname{cth}(v_m\tau) + k_m}\right),$$

где $z_i = \varphi_i X_i^2$, φ_i и k_i – диагональные элементы матриц Φ и K, v_i – параметр, определяемый моделью, а M и m такие значения индексов i, при которых $v_i\operatorname{cth}(v_i\tau) + k_i$ принимает свое минимальное и максимальное значение соответственно.

Теорема 2.11.[3] Ширина полосы, в которой лежат все возможные допустимые форвардные кривые $F(\tau|z,\varphi)$ при фиксированном значении случайного процесса процентной ставке r и заданной матрице Φ равна:

$$\Delta_F = (r - r_{\min})\left(\frac{v_H^2}{\left(v_H \operatorname{ch}(v_H\tau) + k_H \operatorname{sh}(v_H\tau)\right)^2} - \frac{v_h^2}{\left(v_h \operatorname{ch}(v_h\tau) + k_h \operatorname{sh}(v_h\tau)\right)^2}\right),$$

где H и h такие значения индексов i, при которых $\operatorname{ch}(v_i\tau) + (k_i/v_i)\operatorname{sh}(v_i\tau)$ принимает свое минимальное и максимальное значение соответственно.

Аналогичные границы кривых для случая, когда варьирование идет не только по случайным векторам X, но и по матрице Φ, найдены в **теоремах 2.12** [3] для кривой доходности и **2.13** [3] для форвардной кривой.

Полученные результаты позволяют заключить, что стохастические квадратичные модели временной структуры доходности позволяют получать более богатый спектр допустимых кривых доходности и форвардных кривых, чем аффинные модели, которые для фиксированного стартового значения случайного процесса процентной ставки позволяют получить только одну кривую, в то время как квадратичные модели при условиях фиксированных ставок (стартовой, r, и долгосрочной предельной, $y(\infty)$), могут давать довольно широкий спектр кривых доходности и форвардных кривых.

В следующих теоремах исследуется зависимость формы форвардной кривой от выбора случайного вектора X.

Теорема 2.14. Достаточные условия монотонного возрастания и убывания форвардной кривой для любых сроков до погашения в зависимости от начального значения случайного процесса $X(t)$ принимают следующий вид соответственно

$$X_i^2 < \frac{s_i^2}{4s_i^2 A_{ii}(\infty) + 2k_i}, \quad X_i^2 > \frac{s_i^2}{2k_i}, \quad i = \overline{1,n}.$$

где s_i – диагональные элементы матрицы S, $A_{ii}(\infty)$ – предельное значение диагональных элементов матрицы $A(\tau)$ при $\tau \to \infty$.

Теорема 2.15. Достаточным условием существования точки экстремума форвардной кривой в зависимости от начального значения случайного процесса $X(t)$ является выполнение следующих неравенств:

$$\frac{s_i^2}{2k_i} < X_i^2 < \frac{s_i^2}{4s_i^2 A_{ii}(\infty) + 2k_i}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Раздел 2.5 расширяет результаты, полученные в разделе 2.4, на случай ненулевой цены риска случайного процесса $X(t)$. Модель рассматривается в условиях единственного предположения 3, введенного ранее.

В **разделе 2.6** предлагается аналитическое приближение функций временной структуры доходности многомерной стохастической квадратичной модели в условиях только предположений 1 и 2 – в случае наличия зависимости между случайными процессами, характеризующими состояние рынка.

Пусть недиагональные элементы матриц K, S и $A(\tau)$, определяющие взаимодействие случайных процессов, компонент вектора $X(t)$, имеют порядок некоторого наперед заданного малого параметра ε. В **теореме 2.18** [4] найдено выражение для недиагональных элементов матрицы $A(\tau)$ с точностью до порядка малости $o(\varepsilon^2)$. Показано, что функции $A_{ii}(\tau)$, $B(\tau)$ и $C(\tau)$ совпадают с функциями, полученными в **леммах 2.5** и **2.6**. Такой вид решения говорит о том, что с точностью до $o(\varepsilon^2)$ недиагональные элементы матриц $A(\tau)$, K и S не влияют на долгосрочное поведение кривой доходности и форвардной кривой, а определяют поведение лишь для краткосрочных и среднесрочных доходностей.

В **разделе 2.7** исследуется «гибридный» подход на примере стохастической модели «квадратичная, Даффи-Кана», когда часть компонент случайного вектора состояния финансового рынка описывается стохастической квадратичной моделью, а остальные компоненты – аффинной. Предполагается вероятностная независимость компонент одного класса от другого. Модель рассматривается в рамках следующих упрощающих предположений [6]:

- Стохастические модели Даффи-Кана и квадратичная рассматривается в риск-нейтральной вероятностной постановке.
- Компоненты случайного вектора состояния, описываемые описываемого каждой из стохастических моделей, являются независимыми между собой.
- «Квадратичная часть» случайного процесса латентных переменных $X(t)$, является нормальным процессом с нулевым стационарным математическим ожиданием.

В **теореме 2.19** [6] найдены предельные значений функций временной структуры доходности для диффузионной гибридной модели. В **теореме 2.20** [6] исследовано поведение кривых при малых сроках до погашения. Достаточные условия возрастания и убывания форвардной кривой гибридной модели определены в **теореме 2.21** [6]. Ширины полос допустимых кривых при заданном начальном значении случайного процесса $X(t)$ установлены в **теоремах 2.22**, **2.23, 2.24** и **2.25** [6], являющихся аналогами **теорем 2.10, 2.11, 2.12** и **2.13** соответственно для гибридной стохастической модели.

В **разделе 2.8** проведен краткий эмпирический анализ стохастической квадратичной модели на основе статистических данных Европейского Центрального Банка, включая анализ волатильности кривой доходности как случайного процесса. Оценки неизвестных параметров модели получены с помощью расширенного метода моментов.

В **главе 3** решена **задача 4**. В **разделе 3.1** приводится определение стохастической модели CIR 1980, которая задается диффузионным уравнением $\mathrm{d}r(t) = \sigma r^{\gamma}\mathrm{d}W(t)$, где σ и γ характеризуют волатильность случайного процесса $r(t)$, а $W(t)$ – винеровский процесс. В **разделе 3.2** для некоторых значений параметра γ найдены аналитические выражения для стоимости бескупонной облигации. Основные результаты формулируются в виде следующих теорем.

Теорема 3.1.[5] Стоимость бескупонной облигации в риск-нейтральной вероятностной постановке для случая γ = 1/2 примет вид:

$$P(r,\tau)=\exp\left(-\sqrt{2}\,\mathrm{th}\left(\frac{\tau\sigma}{\sqrt{2}}\right)r\Big/\sigma\right).$$

Теорема 3.2.[5] Стоимость бескупонной облигации в риск-нейтральной вероятностной постановке для случая γ = 3/2 примет вид:

$$P(r,\tau)=\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(2\alpha+2)}M\left(\alpha,2(\alpha+1),-x(\tau,r)\right)x^{\alpha}\left(\tau,r\right),\quad \alpha=\frac{\sqrt{8+\sigma^2}-\sigma}{2\sigma},$$

$$M\left(\alpha,\beta,z\right)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)}\int_0^1 \mathrm{e}^{zu}u^{\alpha-1}\left(1-u\right)^{\beta-\alpha-1}\mathrm{d}u,\quad x\left(\tau,r\right)=\frac{2}{\sigma^2\tau r}.$$

Следствие 3.1 расширяет результаты теоремы 3.2 на случай ненулевой цены рыночного риска для случайного процесса $r(t)$.

В **разделе 3.3** на основе вероятностного представления стоимости бескупонной облигации в виде условного математического ожидания (3) предлагается ее аналитическое приближение для произвольного значения γ в стохастической модели CIR 1980, а также оценивается точность приближения. Результаты сформулированы в виде следующих теорем.

Теорема 3.3.[5] Аналитическая аппроксимация стоимости бескупонной облигации может быть найдена по формуле

$$P(r(t),t;t+\tau)\approx\exp\left(-\tau r_0+\frac{\sigma^2 r_0^{2\gamma}}{6}\tau^3-\frac{\gamma^2\sigma^4 r_0^{4\gamma-2}}{24}\tau^4\right),\tag{6}$$

где для удобства используется срок до погашения $\tau = T - \mathrm{t}$, а r_0 – значение случайного процесса $r(t)$ в начальный момент времени.

Теорема 3.4.[5] Обозначим приближенное решение (6) через $P^{ap}(r,\tau)$ и точное решение через $P^{ex}(r,\tau)$, тогда, при $\tau\to 0$ справедлива следующая оценка погрешности

$$\ln P^{ap}(r,\tau)-\ln P^{ex}(r,\tau)=-\frac{1}{4}k_3(r)\tau^4+o(\tau^5),\quad k_3(r)=\frac{\gamma(3\gamma-1)\sigma^4}{6}r^{4\gamma-2}.$$

В **следствии 3.2** [5] к теореме 3.4 приведена улучшенная функция аппроксимации.

В **разделе 3.4** демонстрируется практическое применение аналитической аппроксимации решения для стохастической модели CIR 1980.

Раздел 3.5 посвящен рассмотрению вероятностной модели Хита, Джарроу и Мортона (HJM), как альтернативы традиционному подходу к изучению временной структуры доходности [8]. В **разделе 3.6** рассмотрены основные свойства и частные случаи стохастических моделей HJM, такие как модель Хо-Ли и Васичека. В **разделе 3.7** описаны некоторые подходы к практическому применению моделей HJM, в частности, детально рассмотрен вероятностный метод Монте-Карло [8].

В **главе 4** решена **задача 5**. В **разделе 4.1** дается постановка задачи для одномерных диффузионных стохастических моделей процентных ставок, приводится основное уравнение для поиска стоимости бескупонной облигации. **Раздел 4.2** посвящен описанию основных определений и подходов теории групп Ли решения дифференциальных уравнений вида (4). Основные результаты **разделов 4.3**, **4.4** и **4.5** сформулированы в виде следующих теорем.

В **теореме 4.1** [7] найдена стоимость бескупонной облигации в риск-нейтральной вероятностной постановке для стохастической модели CIR 1980 $\mathrm{d}r(t) = \sigma r^{\gamma}\mathrm{d}W(t)$ в зависимости от значения параметра γ равна. Так, для $\gamma = 0$ решение принимает вид

$$P(\tau,r)=\left(1+c\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma\left(\operatorname{erf}\left(\frac{2r-\sigma^2\tau^2}{2\sigma\sqrt{2\tau}}\right)-1\right)\right)\exp\left(\frac{\sigma^2\tau^3}{6}-r\tau\right),$$

где c некоторая произвольная константа, $\operatorname{erf}(x)$ – функция Лапласа. При $\gamma = 1/2$ и $\gamma = 3/2$ получаются решения, аналогичные результатам теорем 3.1 и 3.2, однако, поиск решения в теоремах 3.1 и 3.2 производился «классическим» путем (с помощью выбора «удачных» замен переменных и метода решения), в то время как доказательство 4.1 носит алгоритмизированный характер.

В **теореме 4.2** [7] найдена стоимость бескупонной облигации для стохастической «модели без ограничений II» $\mathrm{d}r(t) = k(\theta - r)\mathrm{d}t + \sigma r^{\gamma}\mathrm{d}W(t)$ в зависимости от значения параметра γ в риск-нейтральной вероятностной постановке. В частности, при $\gamma = 0$ и $\gamma = 1/2$ модель превращается в модели Васичека и CIR соответственно с известными решениями. При $\gamma = 3/2$ и $\theta = 0$ модель имеет решение

$$\begin{aligned}P(\tau,r)=\psi(z)=\alpha(c)z^{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{8+\sigma^2}}{2\sigma}}\,{}_1F_1\left(\frac{\sqrt{8+\sigma^2}}{2\sigma}-\frac{1}{2},1+\frac{\sqrt{8+\sigma^2}}{\sigma},\frac{2k}{\sigma^2 z}\right)+\\+cz^{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{8+\sigma^2}}{2\sigma}}\,{}_1F_1\left(-\frac{\sqrt{8+\sigma^2}}{2\sigma}-\frac{1}{2},1-\frac{\sqrt{8+\sigma^2}}{\sigma},\frac{2k}{\sigma^2 z}\right),\quad z=r\left(1-\exp(k\tau)\right),\end{aligned} \tag{7}$$

где c – произвольная константа, ${}_1F_1$ – конфлюэнтная гипергеометрическая функция Куммера, и

$$\alpha(c)=\frac{2^{-3-\frac{\sqrt{8+\sigma^2}}{\sigma}}(-k)^{\frac{\sqrt{8+\sigma^2}}{2\sigma}}\left(\sigma+\sqrt{8+\sigma^2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\sqrt{8+\sigma^2}}{2\sigma}\right)}\times$$

$$\times\left(\frac{2^{\frac{1}{2}\left(3+\frac{\sqrt{8+\sigma^2}}{\sigma}\right)}\sqrt{\pi}}{\sigma\sqrt{-k}}+c(-k)^{\frac{\sqrt{8+\sigma^2}}{2\sigma}}\left(\sigma+\sqrt{8+\sigma^2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\sqrt{8+\sigma^2}}{2\sigma}\right)\right),$$

Теорема 4.3.[9] Стоимость бескупонной облигации для стохастической модели $\mathrm{d}r(t) = (ar^p + b(t)r^q)\mathrm{d}t + cr^k\mathrm{d}W(t)$, где a, c, p, q, k некоторые константы, а $b(t)$ – произвольная функция, в зависимости от значений параметров модели в риск-нейтральной вероятностной постановке равна:

1. при $k = 3/2,\ p = 2,\ q = 3,\ a = 0,\ c^2 = 2$, в частном случае, когда время погашения, T, в точности совпадает с параметром γ, решение может быть найдено в виде

$$P(r,t;\gamma)=\mathrm{e}^{-(\gamma-t)r}\left(C_1+C_2\int\limits_1^{(\gamma-t)r}\exp\left(u-\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u\right), \tag{8}$$

где C_1 и C_2 произвольные константы;

2. при $k = 3/2,\ p = 2,\ q = 0,\ b(\tau) = 0$ имеет место решение

$$\begin{gathered}P(\tau,r)=C\left(\frac{2}{c^2r\tau}\right)^{-\frac{1}{2}+\frac{a}{c^2}-\vartheta}{}_1F_1\left(-\frac{1}{2}+\frac{a}{c^2}-\vartheta,1-2\vartheta,-\frac{2}{c^2r\tau}\right)+\\+\alpha(C)\left(\frac{2}{c^2r\tau}\right)^{-\frac{1}{2}+\frac{a}{c^2}+\vartheta}{}_1F_1\left(-\frac{1}{2}+\frac{a}{c^2}+\vartheta,1+2\vartheta,-\frac{2}{c^2r\tau}\right),\\ \vartheta=\frac{\sqrt{8c^2+\left(c^2-2a\right)^2}}{2c^2},\quad \alpha(C)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{a}{c^2}+\vartheta\right)}{\Gamma(1+2\vartheta)}\left(1-C\frac{\Gamma(1-2\vartheta)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{a}{c^2}-\vartheta\right)}\right),\end{gathered} \tag{9}$$

где C – произвольная константа;

3. при $k = 2,\ p = 2,\ q = 0,\ b(\tau) = 0$ модель имеет решение

$$P(\tau,r)=1-r\tau; \tag{10}$$

4. при $k = 3/2,\ p = 2,\ q = 1,\ b(\tau) = b$ имеет место модель Ана-Гао с решением

$$P(\tau,r)=C\left(-\frac{2b}{c^2r\left(1-\mathrm{e}^{b\tau}\right)}\right)^{-\frac{1}{2}+\frac{a}{c^2}-\vartheta}{}_1F_1\left(-\frac{1}{2}+\frac{a}{c^2}-\vartheta,1-2\vartheta,\frac{2b}{c^2r\left(1-\mathrm{e}^{b\tau}\right)}\right)+$$

$$+\alpha(C)\left(-\frac{2b}{c^2r\left(1-\mathrm{e}^{b\tau}\right)}\right)^{-\frac{1}{2}+\frac{a}{c^2}+\vartheta}{}_1F_1\left(-\frac{1}{2}+\frac{a}{c^2}+\vartheta,1+2\vartheta,\frac{2b}{c^2r\left(1-\mathrm{e}^{b\tau}\right)}\right),\qquad(11)$$

$$\vartheta=\frac{\sqrt{8c^2+\left(c^2-2a\right)^2}}{2c^2},\quad \alpha(C)=\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{a}{c^2}+\vartheta\right)}{\Gamma(1+2\vartheta)}\left(1-C\frac{\Gamma(1-2\vartheta)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{a}{c^2}-\vartheta\right)}\right),$$

где C – произвольная константа.

В **замечании 4.6** отмечается, что модель, соответствующая стоимости облигации (8), в силу зависимости функции дрейфа от времени описывает нестационарный случайный процесс.

Как следует из **замечаний 4.4** и **4.8**, выражения (7), (9) и (11) только при $c=0$ будут удовлетворять необходимым экономическим свойствам, накладываемым на стоимость бескупонной облигации.

В **разделе 4.6** на основе прямого уравнения Колмогорова (уравнения Фоккера-Планка) вычисляются основные вероятностные характеристики рассмотренных диффузионных моделей, включая маргинальные плотности вероятностей. **Раздел 4.7** демонстрирует поведение функций временной структуры доходности диффузионных моделей на основе реальных данных.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. Для ряда диффузионных квадратичных моделей найдены аналитические выражения функций временной структуры доходности. Построено аналитическое приближение функций временной структуры для случая зависимых случайных процессов, описывающих состояния рынка, в риск-нейтральной вероятностной постановке многомерной диффузионной квадратичной модели [1, 2, 3, 4].
2. Для одномерного случая диффузионной квадратичной модели найдена корреляционная функция случайных процессов волатильности доходности и наклона форвардной кривой. Показано, что для всех сроков до погашения такие процессы связаны линейно [2].

3. В случае, когда свойства модели рассматриваются в нейтральной к риску вероятностной постановке, определены границы множества допустимых кривых доходностей и форвардных кривых; показано, что стохастическая квадратичная модель позволяет получать более богатый спектр допустимых кривых, чем диффузионные аффинные модели. Найдены достаточные условия монотонного возрастания и убывания, а также наличия точек экстремума форвардной кривой как функции срока до погашения. Полученные результаты расширены на случай диффузионной гибридной модели «квадратичная, Даффи-Кана» [2, 3, 6].

4. Проведен анализ вероятностной модели Хита, Джарроу и Мортона (HJM), как альтернатива традиционному подходу к изучению временной структуры доходности [8].

5. Получены новые представления для стоимости бескупонной облигации некоторых диффузионных моделей в риск-нейтральной вероятностной постановке. Построена аналитическая аппроксимация условного математического ожидания, совпадающего со стоимостью бескупонной облигации диффузионной модели CIR 1980 и оценена погрешность аппроксимации [5, 7, 9].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты, полученные в ходе исследования стохастической квадратичной модели, могут быть использованы как на практике при изучении случайного поведения процентных ставок и деривативов на финансовом рынке, так и для дальнейших теоретических исследований. Результаты, посвященные поиску стоимости бескупонной облигации в различных стохастических моделях временной структуры доходности, носят теоретических характер, могут использоваться как базовые для дальнейших исследований. Также, результаты, полученные в диссертационной работе, могут быть задействованы в учебном процессе при проведении семинаров и спецкурсов для студентов-математиков, подготовке ими курсовых, дипломных работ и диссертаций.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи в научных изданиях в соответствии с пунктом 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь

1. *Павлив, Д.А.* Свойства форвардных кривых однофакторной квадратичной модели временной структуры доходности процентных ставок / Д. А. Павлив // Вестн. Гродненского гос. ун-та имени Я. Купалы. Сер. 2. Мат. Физ. Информат., вычисл. техн. и упр. – 2016. – Т. 6, № 3. – С. 41-49.

2. *Павлив, Д.А.* О свойствах одномерной квадратичной модели временной структуры доходности / Д.А. Павлив // Изв. Гомельского гос. ун-та имени Ф. Скорины. Естественные науки. – 2016. – № 6 (99). – С. 81-86.

3. *Медведев, Г.А.* О квадратичных моделях доходности в риск-нейтральной среде / Г.А. Медведев, Д.А. Павлив // Вестн. Том. гос. ун-та. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2016. – № 4 (37). – С. 44-56.

4. *Павлив, Д.А.* О приближенном решении для квадратичной модели доходности / Д.А. Павлив // Изв. Гомельского гос. ун-та имени Ф. Скорины. Естественные науки. – 2017. – № 6 (115). – С. 116-121.

5. *Павлив, Д.А.* О функциях временной структуры доходности в модели CIR 1980 / Д.А. Павлив // Вестн. Гродненского гос. ун-та имени Я. Купалы. Сер. 2. Мат. Физ. Информат., вычисл. техн. и упр. – 2018. – Т. 8, № 1. – С. 60-69.

6. *Павлив, Д.А.* О гибридной модели временной структуры процентных ставок / Д.А. Павлив // Журнал Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2018. – № 1. – С. 39-47.

7. *Павлив, Д.А.* Об использовании групп симметрий Ли для решения уравнений временной структуры доходности процентных ставок / Д.А. Павлив // Вестн. Гродненского гос. ун-та имени Я. Купалы. Сер. 2. Мат. Физ. Информат., вычисл. техн. и упр. – 2018. – Т. 8, № 2. – С. 51-62.

8. *Павлив, Д.А.* Анализ модели Хита, Джарроу и Мортона (HJM) / Д.А. Павлив // Изв. Гомельского гос. ун-та имени Ф. Скорины. Естественные науки. – 2018. – № 6 (99). – С. 144-149.

9. *Павлив, Д.А.* Об использовании групп симметрий Ли для моделей временной структуры доходности процентных ставок с нелинейными функциями дрейфа и квадрата волатильности / Д.А. Павлив // Журнал Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2018. – № 2. – С. 34-46.

Статьи в сборниках материалов научных конференций

10. *Павлив, Д.А.* Свойства форвардных кривых однофакторной квадратичной модели временной структуры доходности процентных ставок / Д.А. Павлив // XVIII Республиканская научно-практическая конференция молодых ученых, Брест, 13 мая 2016 г.: в 2 ч. / Брест. гос. ун-т им. А С. Пушкина; под общ. ред.: А. Е. Будько. – Брест: БрГУ, 2016. – Ч. 2. – С. 69-71.

11. *Павлив, Д.А.* О гибридной модели временной структуры процентных ставок / Д.А. Павлив // IV Международные научные чтения (памяти А. К. Нартова): сборник статей Международной научно-практической конференции, Москва, 19 ноября, 2016 г. – Москва: ЕФИР, 2016. – С. 5-10.

12. *Павлив, Д.А.* О приближенном решении для квадратичной модели доходности / Д.А. Павлив // Молодежь в науке – 2016: сборник материалов Международной конференции молодых ученых, Минск, 22-25 ноября, 2016 г.: в 2 ч. / Нац. акад. наук Беларуси. Совет молодых ученых; редкол.: В. Г. Гусаков (гл. ред.) [и др.]. – Минск: Беларуская навука, 2017. – Ч. 2. – С. 265-272.

13. *Павлив, Д.А*. О решении дифференциального уравнения в частных производных, определяющего временную структуру доходности для модели CIR 1980 / Д.А. Павлив // XV Международная научно-практическая конференция «Достижения и проблемы современной науки»: материалы, Санкт-Петербург, 11 января, 2017 г. – С-П.: Научный журнал «Globus», 2017. – С. 57-62.

РЭЗЮМЭ

Паўліў Дзмітрый Аляксандравіч

Неаффінныя мадэлі часовай структуры даходнасці

Ключавыя словы: стахастычныя мадэлі працэнтных ставак, часовая структура даходнасці, стахастычнага квадратычнай мадэль, стахастычнага гібрыдная мадэль, кошт аблігацыі, групы сіметрыі Лі.

Мэтай дысертацыйнай працы з'яўляецца даследаванне уласцівасцяў стахастычнай квадратычнай мадэлі часовай структуры даходнасці працэнтных ставак, а таксама рашэнне задачы вызначэння кошту бескупоннай аблігацыі ў розных стахастычных мадэлях часовай структуры даходнасці.

Метады даследавання: метады тэорыі верагоднасцяў, метады тэорыі стахастычных мадэляў працэнтных ставак, тэорыі рашэння дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных, тэорыі груп сіметрыі Лі.

У дысертацыйнай працы атрыманы наступныя *новыя навуковыя вынікі*. Знойдзены прадстаўлення для функцый часовай структуры даходнасці прыватных выпадкаў стахастычнай квадратычнай мадэлі, як дакладныя, так і аналітычныя набліжэнні. У выпадку, калі ўласцівасці мадэлі разглядаюцца ў нейтральнай да рызыкі імавернаснай пастаноўцы, пабудаваны мяжы мноства дапушчальных крывых прыбытковасцяў і форвардной крывых, знойдзены ўмовы іх ўзрастання і змяншэння. Даследаваны ўласцівасці гібрыднай стахастычнай мадэлі «квадратычная, Дафі-Кана». Знойдзены раней невядомыя прадстаўлення ў аналітычным выглядзе для кошту бескупоннай аблігацыі прыватных выпадкаў розных стахастычных мадэляў працэнтных ставак. На аснове імавернаснага прадстаўлення кошту бескупоннай аблігацыі, прапанавана аналітычная апраксімацыя рашэння ўраўненні часовай структуры на прыкладзе мадэлі CIR 1980.

Рэкамендацыі па выкарыстанні. Вынікі, атрыманыя ў дысертацыйнай працы, могуць прымяняцца як на практыцы пры вывучэнні выпадковых паводзінаў працэнтных ставак і дэрыватываў на фінансавым рынку, так і для далейшых тэарэтычных даследаванняў адкрытых пытанняў тэорыі стахастычнага аналізу часовай структуры даходнасці, а таксама ў навучальным працэсе пры правядзенні семінараў і спецкурсаў для студэнтаў-матэматыкаў, падрыхтоўцы імі курсавых, дыпломных работ і дысертацый.

Вобласць ужывання: фінансавыя рынкі каштоўных папер, тэорыя стахастычных мадэляў часовай структуры даходнасці працэнтных ставак.

РЕЗЮМЕ

Павлив Дмитрий Александрович

Неаффинные модели временной структуры доходности

Ключевые слова: стохастические модели процентных ставок, временная структура доходности, стохастическая квадратичная модель, стохастическая гибридная модель, стоимость облигации, группы симметрий Ли.

Целью диссертационной работы является исследование свойств стохастической квадратичной модели временной структуры доходности процентных ставок, а также решение задачи определения стоимости бескупонной облигации в различных стохастических моделях временной структуры доходности.

Методы исследования: методы теории вероятностей, методы теории стохастических моделей процентных ставок, теории решения дифференциальных уравнений в частных производных, теории групп симметрий Ли.

В диссертационной работе получены следующие *новые научные результаты*. Найдены представления для функций временной структуры доходности частных случаев стохастической квадратичной модели, как точные, так и аналитические приближения. В случае, когда свойства модели рассматриваются в нейтральной к риску вероятностной постановке, построены границы множества допустимых кривых доходностей и форвардных кривых, найдены условия их возрастания и убывания. Исследованы свойства гибридной стохастической модели «квадратичная, Даффи-Кана». Найдены ранее неизвестные представления в аналитическом виде для стоимости бескупонной облигации частных случаев различных стохастических моделей процентных ставок. На основе вероятностного представления стоимости бескупонной облигации, предложена аналитическая аппроксимация решения уравнения временной структуры на примере модели CIR 1980.

Рекомендации по использованию. Результаты, полученные в диссертационной работе, могут применяться как на практике при изучении случайного поведения процентных ставок и деривативов на финансовом рынке, так и для дальнейших теоретических исследований открытых вопросов теории стохастического анализа временной структуры доходности, а также в учебном процессе при проведении семинаров и спецкурсов для студентов-математиков, подготовке ими курсовых, дипломных работ и диссертаций.

Область применения: финансовые рынки ценных бумаг, теория стохастических моделей временной структуры доходности процентных ставок.

SUMMARY

Pavliv Dmitry

Non-affine models of the time yield structure

Key words: stochastic interest rate models, time yield structure, stochastic quadratic model, stochastic hybrid model, zero-coupon bond value, Lie symmetry groups.

The aim of the thesis is to study of the properties of a stochastic quadratic model of the term yield structure, as well as solving the problem of determining the value of a zero-coupon bond in various stochastic models of the term yield structure.

Research methods: methods of probability theory, methods of the theory of stochastic interest rate models, the theory of solving differential equations in partial derivatives, theory of Lie symmetry groups.

The following *new scientific results* were obtained in the thesis. Representations for the time yield structure functions of particular cases of the stochastic quadratic model, both exact and analytical approximations, are found. In the case when the properties of the model are considered in a risk-neutral probability setting, the boundaries of the set of admissible yield curves and forward rates are constructed, and the conditions for their increase and decrease are found. The properties of the hybrid stochastic model «quadratic, Duffie-Kan» are investigated. Previously unknown representations in analytical form are found for the value of a zero-coupon bond of particular cases of various stochastic interest rate models. Based on the probabilistic representation of zero-coupon bond value, an analytical approximation is proposed for solving the equation of the term structure using the example of the CIR 1980 model.

Recommendations for use. The results obtained in the thesis can be applied both in practice when studying stochastic behavior of interest rates and derivatives in the financial market, and for further theoretical studies of open questions in the theory of stochastic analysis of the term yield structure models, as well as in the educational process during seminars and special courses for students of mathematics, their preparation of term papers, dissertations and dissertations.

Application scope: financial markets of securities, theory of stochastic models of term yield structure of interest rate.