

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 531/534:[57+61]

МСЕЛАТИ
Абдуфтах Фрхат

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
МАЛЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ КОРНЯ ЗУБА
В ПЕРИОДОНТАЛЬНОЙ СВЯЗКЕ**

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.02.08 – Биомеханика

Минск 2018

Работа выполнена в Белорусском государственном университете

Научный руководитель

БОСЯКОВ Сергей Михайлович,
кандидат физико-математических наук,
доцент, доцент кафедры теоретической
и прикладной механики Белорусского
государственного университета

Официальные оппоненты:

ЧИГАРЕВ Анатолий Власович,
доктор физико-математических наук, про-
фессор, заведующий кафедрой теорети-
ческой механики и мехатроники Бело-
русского национального технического
университета;

СЛАВАШЕВИЧ Ирина Леонидовна,
кандидат физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник отдела стра-
тегических инноваций ЗАО «АДАНИ
Технолоджис»

Оппонирующая организация

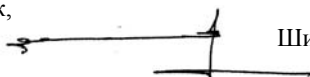
Белорусский государственный техноло-
гический университет

Защита состоится «28» декабря 2018 г. в 14:00 на заседании совета по защите диссертаций Д 02.05.07 при Белорусском национальном техническом университете по адресу: 220013, г. Минск, проспект Независимости, 65, корпус 1, аудитория 202. Телефон ученого секретаря (+375 17) 292-24-04.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского национального технического университета.

Автореферат разослан «28» ноября 2018 г.

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций Д 02.05.07,
кандидат физико-математических наук,
доцент



Ширвель П. И.

© Мселати А. Ф., 2018

© Белорусский национальный
технический университет, 2018

ВВЕДЕНИЕ

Зубы окружены периодонтальной связкой, являющейся тонкой мембраной, обеспечивающей прикрепление зуба к окружающей альвеолярной костной ткани. Действующая на коронку зуба нагрузка передается на альвеолярную кость посредством деформаций периодонтальной связки. Основываясь на высокой упругости тканей периодонтальной связки по сравнению с костями и зубами, большинство исследователей (Bourauel et al., 1999, С. Dorow и F.G. Sander, 2005) указывают на то, что именно ткани периодонта определяют начальные перемещения зуба.

Расчету начальной подвижности однокоренных и многокоренных зубов посвящены многочисленные конечно-элементные (P.M. Cattaneo, M. Dalstra, B. Melsen, 2005; R. Clement, 2004; С. Dorow, F.G. Sander, 2005; M.L. Jones, 2001; A. Kawarizadeh, С. Bourauel, A. Jäger, 2003; G. Pietrzak, 2002; С.G. Provatidis, 2000; D. Vollmer, 1999, и др.) и аналитические (Ю.И. Няшин, А.Л. Дубинин, 2017; О.И. Дударь, 2009; С.А. Наумович, А.Е. Крушевский, 2000; А.N. Natali, 2007; R.J. Nikolai, 1996; R.P. Kusy, J.F.C. Tulloch, 1986; E. Peña, J.A. Peña, M. Doblaré, 2008; N. Slomka, 2008; R.J. Smith, C.J. Burstone, 1984; A. Van Schepdael, L. Geris, J. Van der Sloten, 2013 и др.) исследования. При этом важнейшее значение имеют сведения о центре сопротивления корня зуба, величинах перемещений и углов поворота корня и напряженно-деформированного состояния периодонтальной связки. Это обусловлено тем, что при планировании краткосрочных и долгосрочных перемещений зубов в качестве ориентира, как правило, рассматриваются точки приложения нагрузки, соответствующие поступательному перемещению зубов. Другие виды движения зубов, как правило, также описываются с учетом расположения центра сопротивления или зависимостей «момент/сила». Построение различных положений зубов при их перемещении выполняется в плоском случае, тогда как, перемещение зуба является трехмерным, поэтому для биомеханического анализа необходима информация о пространственном перемещении зуба. Поэтому представляется актуальной и практически востребованной разработка механико-математической модели начальных перемещений корня зуба в периодонтальной связке.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Диссертационная работа выполнялась в рамках следующих научных программ и проектов:

1. Государственная программа научных исследований «Междисциплинарные научные исследования, новые зарождающиеся технологии как основа устойчивого инновационного развития» (ГПНИ «Конвергенция») подпрограмма «Разработка и исследование математических методов и их применение

для решения актуальных проблем естествознания, техники, экономики и социальных наук», задание 1.8.01 (№ ГР 20113045 от 07.09.2011 г., 2010–2015 гг.);

2. Международный грант «Trans-Atlantic Micromechanics Evolving Research: Materials containing inhomogeneities of diverse physical properties, shapes and orientations» supported by FP7-PEOPLE-2013-IRSES Marie Curie Action «International Research Staff Exchange Scheme» (2014–2017 гг.).

Цель и задачи исследования

Целью диссертационной работы является разработка механико-математической модели начальных перемещений корня зуба в форме параболоида в периодонтальной связке постоянной и неравномерной толщины.

Для достижения поставленной в работе цели решены следующие основные задачи:

- разработана механико-математическая модель корня зуба в форме составного параболоида в периодонтальной связке постоянной и переменной толщины;
- определены области сопротивления для корня зуба в форме параболоида с круговым и эллиптическим сечениями, составного параболоида с одной осью симметрии и асимметричного корня зуба в форме составного параболоида;
- проведен анализ влияния геометрических размеров корня зуба на размеры и локализацию области сопротивления;
- выполнен анализ распределений усредненных по величине нормальных напряжений и деформаций в периодонтальной связке постоянной и переменной толщины при поступательных перемещениях корня зуба;
- определены диапазоны значений ортодонтической нагрузки на корень зуба, соответствующие отсутствию болевых ощущений при поступательном перемещении зубов в периодонтальной связке;
- разработан подход к визуализации трехмерных перемещений корней зубов в периодонтальной связке на основании уравнения винтовой линии и с применением оси винтовой линии;
- разработаны конечно-элементные модели корня зуба в форме параболоида с круговым сечением и проведен сравнительный анализ напряженного состояния периодонтальной связки на основании конечно-элементной и аналитической моделей.

Для решения поставленных в диссертационной работе задач применены методы механики деформируемого твердого тела и теории упругости, метод конечных элементов, методы линейной и векторной алгебры, а также методы дифференциального и интегрального исчисления.

Геометрическое моделирование и конечно-элементные расчеты выполнены на основании функциональных возможностей пакета ANSYS; численные и символьные результаты, визуализация полей напряжений и начальных положений корня зуба до и после приложения нагрузки получены с применением функциональных возможностей компьютерной системы *Mathematica*.

Научная новизна

Научная новизна диссертационной работы состоит в нахождении условий поступательного перемещения корня зуба в периодонтальной связке, внешняя поверхность которого описывается уравнением четырех или двух параболоидов, уравнением параболоида с эллиптическим или круговым сечениями, сформулированных на основании системы уравнений равновесия корня зуба как упруго закрепленного твердого тела. Значимым с научной точки зрения результатом является разработка методики визуализации трехмерных перемещений корня зуба в периодонтальной связке под действием сосредоточенной силы, а также разработка механико-математической модели начальных перемещений корня зуба в периодонтальной связке неравномерной толщины.

Положения, выносимые на защиту

Новыми результатами, выносимыми на защиту, являются:

1. Области сопротивления и положение прямых поступательного воздействия для корня зуба в форме параболоида с круговым и эллиптическим сечением, в форме составного параболоида с одной плоскостью симметрии, а также асимметричного составного параболоида, определяющие условия поступательного перемещения корней зубов указанной геометрической формы периодонтальной связке, которые позволяют задавать направление и точку приложения нагрузки к зубу для его ортодонтического перемещения.

2. Методика трехмерной визуализации различных типов перемещений корня зуба в форме параболоида, отличающаяся использованием уравнения винтовой линии, которая позволяет определить перемещения вдоль винтовой линии, установить тип перемещения зуба, также получить качественные и количественные сведения о начальных поступательных перемещениях и поворотах корня зуба.

3. Механико-математическая модель периодонтальной связки неравномерной толщины, отличающаяся учетом изменения толщины связки по высоте корня зуба, позволяющая определить условия поступательного перемещения корня зуба и возникающее при начальных перемещениях корня напряженно-деформированное состояние тканей периодонта для планирования ортодонтического лечения и прогнозирования его результатов.

4. Закономерности, определяющие распределение средних нормальных напряжений в периодонтальной связке, возникающее при поступательном перемещении корня зуба в вертикальной и горизонтальной плоскостях, которые позволяют установить диапазоны ортодонтической нагрузки для перемещения зубов без болевых ощущений в периодонтальной связке.

Личный вклад соискателя ученой степени

Все основные результаты, выносимые на защиту диссертации, получены автором лично. Научный руководитель С.М. Босяков и соавторы научных исследований принимали участие в постановке задач, анализе полученных результатов, а также проводили консультации по разработке твердотельных геометрических и конечно-элементных моделей корня зуба и периодонтальной связки.

Апробация результатов диссертации и информация об использовании ее результатов

Основные результаты, вошедшие в диссертационную работу, прошли апробацию на следующих международных, республиканских и вузовских научных конференциях:

1. 71-ая научная конференция студентов и аспирантов Белорусского государственного университета (БГУ, Минск, 18–21 мая 2014 г.);
2. IX Международная научная конференция «Математические проблемы механики неоднородных структур» (Львовский национальный университет, Львов, Украина, 15–19 сентября 2014 г.);
3. 72-ая научная конференция студентов и аспирантов Белорусского государственного университета (БГУ, Минск, 11–22 мая 2015 г.);
4. XI Всероссийская конференция «Биомеханика-2014» (Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия, 1–4 декабря 2014 г.);
5. XLII Summer School-Conference «Advanced Problems in Mechanics» (Saint- Petersburg State University, St. Petersburg, Russia, June 30–July 6, 2014);
6. XLV Международный научно-методический семинар-коллоквиум «Моделирование и компьютеринг в механических и мехатронных системах» (БНТУ, Минск, 4–6 февраля 2014 г.);
7. 8-ой Международный семинар «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений» (БГУ, Минск, 14–19 сентября 2015 г.);
8. International Workshop on Computer Algebra System in Teaching and Research CASTR-2015 (Siedlce University, Poland, October 21–25, 2015).

Результаты диссертации внедрены в учебный процесс в Белорусском государственном университете и Белорусской академии последипломного образования, а также в клиническую практику стоматологической поликлиники.

Опубликование результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 17 научных работах: одной главе монографии, 9 статьях в научных журналах, соответствующих п. 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоения ученых званий в Республике Беларусь (общим объемом 3,05 авторского листа), 3 статьи в материалах и трудах конференций, 4 тезиса докладов.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, общей характеристики работы, трех глав, заключения, библиографического списка и одного приложения. Полный объем диссертационной работы составляет 119 страниц, из них 100 страница основного текста. Количество рисунков – 33, таблиц – 10. Библиографический список из 157 источников, включая 17 работ соискателя.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Основное содержание диссертационной работы составляют три главы.

В **первом** и **втором** пунктах **первой** главы приводится обзор литературных источников, связанных с исследованием начальных (кратковременных) и ортодонтических (долговременных) перемещений корня зуба, а также определением условий поступательный перемещений корня зуба на основании понятия центра сопротивления корня зуба. Здесь также представлены континуальные модели, описывающие поведение периодонтальной связки при перемещениях корня зуба, подходы к математическому моделированию напряженно-деформированного состояния периодонтальной связки при перемещениях корня зуба, а также проанализированы результаты моделирования периодонтальной связки неравномерной толщины. В **третьем** пункте **первой** главы выведена система уравнений равновесия корня зуба, поверхность которого описывается уравнением поверхности $F(x, y, z) = 0$, в почти несжимаемой периодонтальной связке. В соответствии с работами С.Г. Provatidis, 2001, J.S. Rees и P.H. Jacobsen, 1997, а также А. Van Schepdael, L. Geris и J. Van der Sloten, 2013 это подразумевает, что при смещении корня зуба к стенке зубной альвеолы ткани периодонтальной связки начинают «растекаться» вокруг поверхности корня зуба и для любой точки периодонтальной связки, прилегающей к поверхности корня зуба, деформации и относительные сдвиги пропорциональны перемещениям точек периодонта вдоль нормали, образующей и направляющей к поверхности корня зуба:

$$\varepsilon_{nn} = -u_n/\delta, \varepsilon_{tt} = \varepsilon_{\theta\theta} = 0, \varepsilon_{n\theta} = -u_\theta/(2\delta), \varepsilon_{nt} = -u_t/(2\delta), \varepsilon_{t\theta} = 0, \quad (1)$$

где u_n , u_t и u_θ – перемещения точек периодонтальной связки по нормали \vec{n} , образующей \vec{t} и направляющей $\vec{\theta}$ к поверхности корня зуба; ε_{nn} , ε_{tt} , $\varepsilon_{\theta\theta}$, $\varepsilon_{n\theta}$, ε_{nt} и $\varepsilon_{t\theta}$ – компоненты тензора деформаций в системе координат, связанной с нормалью, образующей и направляющей к поверхности корня зуба; δ – ширина периодонтальной связки в направлении нормали к поверхности корня.

Равновесие корня зуба в периодонтальной связке описывается равенством нулю главного вектора и главного момента сил, действующих на зуб

$$\iint_F (\vec{n} \cdot \sigma) dF - \vec{f} = 0, \iint_F \vec{r} \times (\vec{n} \cdot \sigma) dF - \vec{m} = 0, \quad (2)$$

где \vec{m} и \vec{f} – главный момент и главный вектор внешних сил; $\vec{r} = (x, y, z)$ – радиус-вектор; \vec{n} – единичный вектор нормали к поверхности корня зуба $F(x, y, z) = 0$; σ – тензор напряжений.

После перехода от перемещений точек, расположенных на внутренней поверхности периодонтальной связки, в системе координат, связанной с нормалью, образующей и направляющей к поверхности корня, к перемещениям в декартовой системе координат, а также после перехода от компонент тензора деформаций в декартовой системе координат к компонентам тензора деформаций в системе координат, связанной с нормалью, образующей и направляющей к поверхности корня, на основании уравнений равновесия (2) и соотношений (1) получена алгебраическая система уравнений относительно поступательных перемещений и углов поворота корня зуба. Поскольку толщина периодонтальной связки очень мала, углы поворота тоже малы, при этом использованы линеаризованные формулы, описывающие перемещение корня зуба u_x , u_y и u_z посредством комбинации поступательных перемещений u_{0x} , u_{0y} и u_{0z} вдоль соответствующих координатных осей и углами поворота вершины корня θ_x , θ_y и θ_z относительно этих же осей:

$$u_x = u_{0x} + z\theta_y - y\theta_z, u_y = u_{0y} - z\theta_x + x\theta_z, u_z = u_{0z} + y\theta_x - x\theta_y. \quad (3)$$

Коэффициенты системы уравнений равновесия корня зуба (жесткости периодонтальной связки) зависят от его геометрической формы, физико-механических свойств периодонтальной связки и ее толщины. На основании этой системы уравнений выполнен расчет центра сопротивления для корня зуба в форме параболоида с круговым сечением и проведен сравнительный анализ расчета координат центра сопротивления на основании математической и конечно-элементной моделей. Соответствующая конечно-элементная модель разработана в программном комплексе ANSYS R18.2 и параметризована по геометрическим параметрам корня зуба, толщине и упругим свойствам периодонтальной связки. Наибольшее отклонение результатов расчета координат центра сопротивления с использованием математической модели от конечно-элементного моделирования для однокоренных зубов верхней челюсти составило 4,80 %, для однокоренных зубов нижней челюсти – 2,91 %.

Первый пункт второй главы посвящен определению условий поступательного перемещения корня зуба в периодонтальной связке под действием сосредоточенной нагрузки, внешняя поверхность которого, совпадающая с внутренней поверхностью периодонтальной связки, описывается следующими уравнениями параболоидов:

$$F_k(x, y, z) = y - h \left(\left(\frac{x}{a_k} \right)^2 + \left(\frac{z}{b_k} \right)^2 \right) = 0, \quad (4)$$

где h – высота корня зуба; a_k, b_k – полуоси эллипса в сечении корня зуба на уровне альвеолярного гребня; $a_4 = a_1 = b_1 / \sqrt{1 - e_{t1}^2}$, $a_3 = a_2 = b_2 / \sqrt{1 - e_{t2}^2}$, $b_2 = b_1$, $b_4 = b_3$; e_{t1} и e_{t2} – эксцентриситеты эллипсов; поверхность $F_k(x, y, z) = 0$ при $k = 1$ определена на промежутках $x \geq 0$ и $y \geq 0$, при $k = 2$ – на промежутках $x < 0$ и $y \geq 0$, при $k = 3$ – на промежутках $x < 0$ и $y < 0$, при $k = 4$ определена на промежутках $x \geq 0$ и $y < 0$.

При формулировке условий поступательного перемещения использован подход, разработанный Ю.И. Няшиным, М.А. Осипенко и А.Л. Дубининым и основанный на понятиях области сопротивления и прямой поступательного воздействия (областью сопротивления представляет собой геометрическое место точек, через которые проходят прямые поступательного воздействия, являющимися линиями действия нагрузки для поступательного перемещения зуба).

После соответствующих преобразований системы равновесия установлено, что областью сопротивления корня зуба, внешняя поверхность которого описывается уравнением (4), является горловой эллипс однополостного гиперболоида, описываемого следующим уравнением

$$\begin{aligned} p_{11}x_f^2 + p_{22}z_f^2 + p_{33}y_f^2 + p_{12}x_f z_f + p_{13}x_f y_f + \\ + p_{23}y_f z_f + p_1 x_f + p_2 z_f + p_3 y_f + p_0 = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

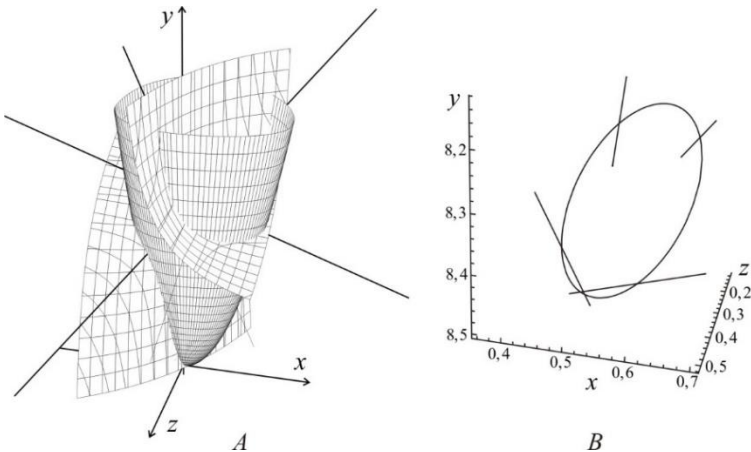
где константы p_{ij} , p_i и p_0 определяются комбинацией коэффициентов системы равновесия корня зуба (жесткостей периодонтальной связки). Прямолинейные образующие гиперболоида (5), проходящие через точки его горлового эллипса, представляют собой прямые поступательного воздействия. Если линия действия нагрузки проходит вдоль прямой поступательного воздействия, зуб получает поступательное перемещение в пространстве.

Для преобразования уравнения (5) выполнено численно интегрирование этих коэффициентов по поверхности (4) на основании метода Гаусса – Кронрода в обобщенных цилиндрических координатах. При интегрировании принимается высота корня зуба $h = 13,0$ мм, полуоси $b_1 = 3,9$ мм и $b_2 = 2,0$ мм, эксцентриситеты $e_{t1} = 0,60$ и $e_{t2} = 0,75$; модуль упругости, коэффициент Пуассона и толщина периодонтальной связки $E = 680,0$ кПа, $\nu = 0,49$ и $\delta = 0,229$ мм соответственно (С.Г. Provatidis, 2001).

На рисунке 1 показан корень зуба и область сопротивления, а также горловой эллипс с прямыми поступательного воздействия (геометрические размеры корня зуба и материальные константы имеют прежние значения).

При $a_4 = a_1 = b/\sqrt{1-e_{f1}^2}$, $a_3 = a_2 = b/\sqrt{1-e_{f2}^2}$, $b = b_1 = b_2$, корень зуба имеет одну плоскость симметрии $z = 0$. Область сопротивления такого корня зуба образуют две точки $P_1^{(1)}(x_1, y_1, 0)$ и $P_2^{(1)}(x_2, y_2, 0)$, координаты которых выражаются через коэффициенты системы равновесия. Прямые поступательного воздействия проходят через эти точки и расположены в плоскостях, определяемых следующими уравнениями

$$(y - y_2)(x - x_1) - (y - y_1)(x - x_2) = 0, \quad z = 0.$$



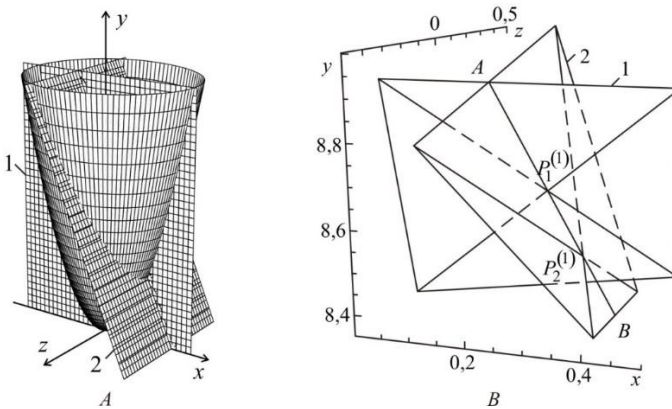
A – однополостной гиперболоид (5) и прямые поступательного воздействия; **B** – область сопротивления, являющаяся горловым эллипсом однополостного гиперболоида (5)

Рисунок 1. – Однополостной гиперболоид (5), прямые поступательного воздействия для асимметричного корня зуба в форме составного параболоида (масштаб по координатным осям приведен в мм)

На рисунке 2 показаны корень зуба и плоскости, в которых расположены прямые поступательного воздействия (принимаем $b = 3,9$ мм, $e_{f1} = 0,6$ и $e_{f2} = 0,2$, остальные геометрические параметры и материальные константы имеют прежние значения).

Прямая AB , показанная на рисунке 2, B , является линией пересечения двух плоскостей, содержащих прямые поступательного воздействия. Через точку

$P_1^{(1)}$ в плоскости 1 проходят линии действия сил для поступательного перемещения в плоскости xOy , через точку $P_2^{(1)}$ в плоскости 2 проходят линии действия сил для поступательного перемещения в пространстве. Точки $P_1^{(1)}$ и $P_2^{(1)}$ принадлежат прямой AB и имеют координаты $(0,234; 0; 8,600)$ и $(0,303; 0; 8,438)$ соответственно (значения координат приведены в мм).



A – плоскости, содержащие прямые поступательного воздействия;
 B – область сопротивления $P_1^{(1)}$ и $P_2^{(1)}$ с прямыми поступательного
 воздействия; 1 – плоскость $z = 0$, 2 – плоскость
 $(y - y_2)(x - x_1) - (y - y_1)(x - x_2) = 0$

**Рисунок 2. – Плоскости, содержащие прямые поступательного
 воздействия и область сопротивления для корня зуба с одной
 плоскостью симметрии**

Для модели корня в форме параболоида с эллиптическим сечением принимаем полуоси $a = a_1 = a_2$ и $b = b_1 = b_2$, $a = b / \sqrt{1 - e_{t1}^2}$, $e_{t1} = e_{t2}$. Область сопротивления также образуют две точки $P_1^{(2)}(0, y_1, 0)$ и $P_2^{(2)}(0, y_2, 0)$, координаты которых определяются через соотношение коэффициентов системы равновесия. Прямые поступательного воздействия расположены в плоскостях $x = 0$ и $z = 0$. Если линия действия силы расположена в плоскости xOy (или yOz) и проходит через точку $P_1^{(2)}$ (или $P_2^{(2)}$), то зуб получает поступательное перемещение в плоскости xOy (или yOz). В случае, если $b = 3,9$ мм и

$e_{11} = 0,6$ (остальные геометрические параметры и материальные постоянные имеют прежние значения) координаты точек $P_1^{(2)}$ и $P_2^{(2)}$, образующих область сопротивления, равны $(0; 0; 8,759)$ мм и $(0; 0; 8,441)$ мм соответственно.

Для корня зуба в форме кругового параболоида $b = a_1 = a_2 = b_1 = b_2$. В этом случае существует единый центр сопротивления корня зуба $P_0(0, y_0, 0)$, координаты которого определяются соотношением коэффициентов системы уравнений равновесия корня зуба. Любая сила, линия действия которой проходит через эту точку, приводит к поступательному перемещению зуба (необязательно в направлении действия силы).

Во **втором** пункте **второй** главы выполнен анализ влияния на геометрические размеры и расположение области сопротивления для асимметричного корня зуба, внешняя поверхность которого описывается четырьмя различными параболоидами, корня зуба с одной плоскостью симметрии, описываемом двумя различными параболоидами, и корня зуба в форме параболоида с эллиптическим сечением.

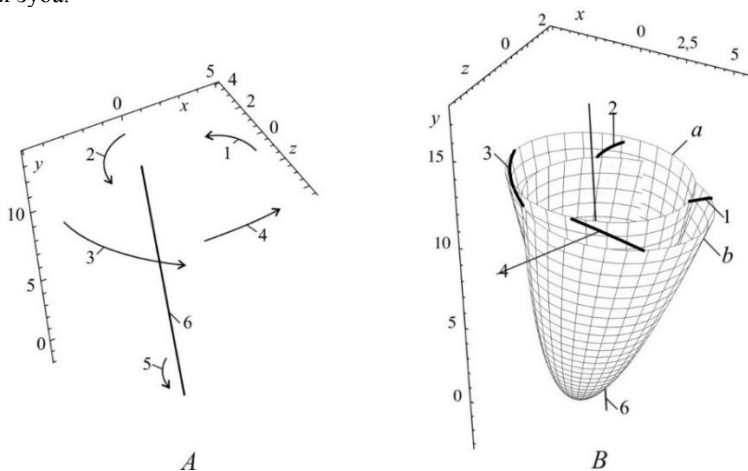
В **третьем** пункте **второй** главы представлена методика визуализации различных типов трехмерного перемещения корня зуба в периодонтальной связке с использованием уравнения винтовой линии и перемещения u_s полюса корня вдоль винтовой линии, которое определяется на основании значений поступательных перемещений u_{0x} , u_{0y} , u_{0z} и углов поворота θ_x , θ_y , θ_z

$$u_s = \frac{u_{0x}\theta_x + u_{0y}\theta_y + u_{0z}\theta_z}{\sqrt{\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2}}.$$

В случае если перемещение u_s отлично от нуля, перемещение зуба является винтовым. Уравнение оси винта в параметрическом виде (t – параметр) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\theta_x(u_z(\theta_x^2 + \theta_y^2) - \theta_z(u_x\theta_x + u_y\theta_y))}{\theta_y\theta_z(\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2)} - \frac{(\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2)t}{\theta_y\theta_z}, \quad y = \frac{(\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2)t}{\theta_x\theta_z}, \\ z &= \frac{\theta_x(\theta_x(u_y\theta_y + u_z\theta_z) - u_x(\theta_y^2 + \theta_z^2))}{\theta_y\theta_z(\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2)} - \frac{(\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2)t}{\theta_x\theta_y}. \end{aligned} \quad (6)$$

На рисунке 3 показаны траектории начальных перемещений пяти точек зуба в форме параболоида с эллиптическим поперечным сечением, ось винтовой линии, определяемая уравнениями (6), а также начальные и конечные положения корня зуба.



- 1 – траектория перемещения точки с координатами $\left(b/\sqrt{1-e^2}, h, 0 \right)$;
 2 – траектория перемещения точки с координатами $(0, h, b)$;
 3 – траектория перемещения точки с координатами $\left(-b/\sqrt{1-e^2}, h, 0 \right)$;
 4 – траектория перемещения точки с координатами $(0, h, -b)$;
 5 – траектория перемещения точки с координатами $(0, 0, 0)$;
 6 – ось винтовой линии; a, b – начальное и конечное положения корня зуба

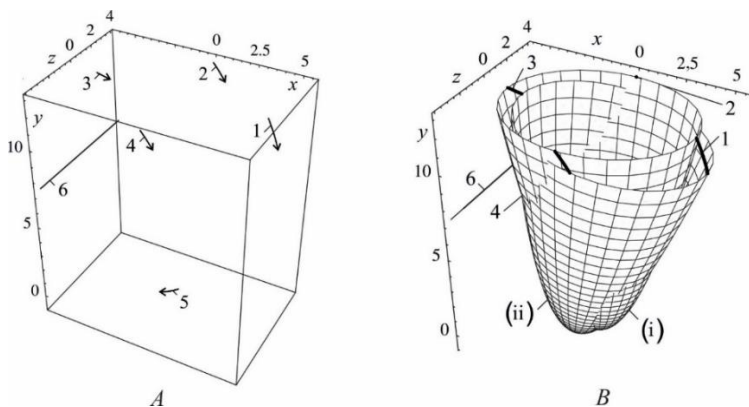
Рисунок 3. – Результат визуализации наклонно-вращательного движения корня зуба с траекториями начальных перемещений точек зуба (A), а также начального и конечного положений (B)

На зуб действует сосредоточенная сила $\vec{f} = (1; -1; 1)$ Н, приложенная в точке с координатами $\left(b/\sqrt{1-e^2}, h, 0 \right)$; геометрические размеры корня $h = 13,0$ мм, $b = 3,9$ мм и $e = 0,6$; упругие свойства периодонтальной связки и ее толщина имеют прежние значения. При визуализации траекторий перемещения точек и положений корня зуба принят коэффициент масштабирования равный 1000 (размеры корня зуба приведены в мм). В случае если вращение

происходит в плоскости, параллельной одной из координатных плоскостей, положение осей вращения параллельных осям координат описывается следующими параметрическими уравнениями:

$$x = -\frac{u_y}{\theta_z}, y = \frac{u_x}{\theta_z}, z = t, \quad x = t, y = -\frac{u_z}{\theta_x}, z = \frac{u_y}{\theta_x}, \quad x = \frac{u_z}{\theta_y}, y = t, z = -\frac{u_x}{\theta_y}. \quad (7)$$

Первое уравнение (7) соответствует вращательному движению корня зуба в плоскости, параллельной координатной плоскости xOy , второе и третье уравнения (7) – в плоскостях параллельных координатным плоскостям yOz и xOz соответственно. На рисунке 4 показано положение оси вращения в плоскости $z = 0$ (геометрические размеры корня зуба, механические свойства и толщина периодонтальной связки прежние).



- I** – траектория перемещения точки с координатами $\left(b/\sqrt{1-e^2}, h, 0\right)$,
2 – траектория перемещения точки с координатами $(0, h, b)$,
3 – траектория перемещения точки с координатами $\left(-b/\sqrt{1-e^2}, h, 0\right)$,
4 – траектория перемещения точки с координатами $(0, h, -b)$,
5 – траектория перемещения точки с координатами $(0, 0, 0)$,
6 – ось вращения; **(i)** – начальное положение корня зуба,
(ii) – конечное положение корня зуба

Рисунок 4. – Результат визуализации вращательного движения корня зуба с обозначением траекторий начальных перемещения точек зуба (A) и положений корня зуба (B)

При построении рисунка 4 принимаются компоненты действующей нагрузки $\vec{f} = (1, -1, 0)$ и точка приложения $(b/\sqrt{1-e^2}, h, 0)$.

При равенстве нулю всех углов поворота зуба перемещение u_s вдоль винтовой линии имеет неопределенное значение. Это указывает на поступательное перемещение зуба.

В **первом** пункте **третьей** главы выведены соотношения, определяющие среднее нормальное напряжение σ_h , возникающее в периодонтальной связке при поступательном перемещении корня зуба в форме параболоида с эллиптическим сечением. Согласно G.C. Provatidis, 2000, 2001, напряжения σ_h рассматриваются в качестве первичных для перестройки костной ткани при ортодонтическом перемещении зубов.

При поступательном движении корня зуба в плоскости xOy и yOz под действием произвольно ориентированной нагрузки, выражения для средних нормальных напряжений имеют следующий вид:

$$\sigma_h^{(xOy)} = \frac{E(a_{11}f_y \cos(\alpha) - a_{22}f_x H \sin(\alpha))}{3a_{11}a_{22}\delta(1-2\nu)}, \quad (8)$$

$$\sigma_h^{(yOz)} = \frac{E(a_{33}f_y \cos(\alpha) - a_{22}f_z G \sin(\alpha))}{3a_{22}a_{33}\delta(1-2\nu)}, \quad (9)$$

где E и ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона периодонтальной связки; a_{11} , a_{22} и a_{33} – жесткости периодонтальной связки при поступательном перемещении корня зуба в направлении осей координат Ox , Oy и Oz соответственно, зависящие от упругих свойств периодонтальной связки и геометрических размеров; h – толщина периодонтальной связки, $H = x(1-e^2)/\sqrt{x^2(1-e^2)^2 + z^2}$; $G = z/\sqrt{x^2(1-e^2)^2 + z^2}$; b – малая полуось эллипса в поперечном сечении корня зуба на уровне альвеолярного гребня; $\text{tg}(\alpha) = \frac{2h}{b^2}\sqrt{x^2(1-e^2)^2 + z^2}$; e – эксцентриситет эллипса в поперечном сечении корня зуба; δ – толщина периодонтальной связки; f_x , f_y и f_z – составляющие сосредоточенной нагрузки, приложенной к зубу.

На основании выражений (8), (9) можно определить диапазоны ортодонтических нагрузок, при которых будут отсутствовать болевые ощущения в периодонтальной связке при перемещении зубов. Наибольшее из таких напряжений

составляет 39,0 кПа (Е.Н. Нихон, 1969), наименьшее 4,0 кПа (L.R. Iwasaki, 2000). С учетом указанных значений напряжений установлено, что диапазон величин ортодонтической нагрузки, действие которой не приводит к возникновению болевых ощущений, при поступательном перемещении в плоскости xOy составляет от 0,13 Н до 1,31 Н (точка приложения нагрузки расположена между корнем зуба и коронкой). При поступательном движении в плоскости yOz предельные значения нагрузки составляют 0,16 Н и 1,13 Н.

Во **втором** пункте **третьей** главы представлены результаты разработки модели периодонтальной связки неравномерной толщины в случае корня зуба с круговым сечением. При этом предполагается, что внешняя поверхность корня зуба (совпадающая с внутренней поверхностью периодонтальной связки) описывается следующим уравнением параболоида:

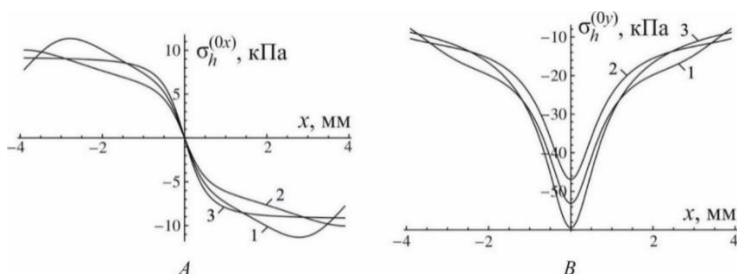
$$F(x, y, z) = y - \frac{h}{b^2}(x^2 + z^2) = 0, \quad (10)$$

где h – высота корня зуба; b – радиус сечения корня зуба на уровне альвеолярного гребня. Внешняя поверхность периодонтальной связки, прилегающая к костной ткани зубной альвеолы смещена по нормали по отношению к поверхности корня зуба (10) на величину $\delta(y)$.

В соответствии с данными о периодонтальных связках неравномерной толщины, представленными в работах А. Hohmann, 2011 и S.R. Toms, A.W. Eberhardt, 2003 предложены две модели, соответствующие различным случаям изменения толщины периодонтальной связки по высоте корня зуба. В модели 1 функция $\delta(y) = \delta_{t1} + \delta_{t2}(1 - 2y/h)^2$, $\delta_{t1} = 0,204$ мм, $\delta_{t2} = 0,096$ мм. Этот случай соответствует уменьшению толщины периодонтальной связки от вершины корня зуба и альвеолярного гребня к средней трети корня зуба. В модели 2 толщина связки определяется функцией $\delta(y) = \delta_{h1} + \delta_{h2}(1 - y/h)^2$, $\delta_{h1} = 0,2$ мм, $\delta_{h2} = 0,1$ мм. Ширина периодонтальной щели в этом случае увеличивается от альвеолярного гребня к апексу. Для сравнительного анализа влияния толщины периодонтальной связки на возникающие в ней при поступательном перемещении зуба напряжения, дополнительно к двум указанным моделям рассматривалась модель 3 периодонтальной связки постоянной толщины $\delta(y) = 0,25$ мм.

Расчет центра сопротивления при геометрических размерах корня зуба $h = 13,0$ мм, $b = 3,9$ мм и прежних упругих свойствах тканей периодонта для моделей 1–3 показал, что изменение ширины периодонтальной связки в соот-

ветствии с моделями 1 и 2 приводит к различным значениям координаты (различие составляет $\approx 7,3\%$). Отличие координат центров сопротивления для моделей 1 и 2 по сравнению с моделью 3 незначительны. Зависимости средних нормальных напряжений $\sigma_h^{(0x)}$ и $\sigma_h^{(0y)}$ в периодонтальной связке, возникающие при поступательном перемещении зуба вдоль координатных осей Ox и Oy (соответствует перемещению в горизонтальном и в вертикальном направлении) представлены на рисунке 5. Зависимости получены при действии на корень зуба сосредоточенной нагрузки с компонентами $(1, 0, 0)$ Н и $(0, -1, 0)$ Н соответственно; линии действия сил проходят через центр сопротивления с координатами $(0, y_0, 0)$.



1, 2 и 3 – зависимости, соответствующие моделям 1, 2 и 3

Рисунок 5. – Зависимости средних нормальных напряжений на внутренней поверхности периодонтальной связки при поступательном перемещении корня зуба вдоль оси Ox (A) и Oy (B)

Рисунок 5 показывает, что для моделей 1–3 зависимости средних нормальных напряжений от пространственных координат при поступательном перемещении корня зуба подобны друг другу; отличия имеют место только для численных значений соответствующих напряжений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. Выведена система уравнений равновесия корня зуба, позволяющая определять начальные перемещения однокоренного зуба в форме составного параболоида в периодонтальной связке под действием малых по величине нагрузок. На основании этой системы определены области сопротивления для асимметричного корня зуба в форме составного параболоида, корня зуба в форме составного параболоида с одной плоскостью симметрии, параболоида с эллиптическим и круговым сечениями [1, 8, 10, 11, 13, 14, 16].

2. Выведено уравнение однополостного гиперболоида, горловой эллипс которого является областью сопротивления асимметричного корня зуба, состоящего из четырех различных параболоидов. Прямолинейные образующие этого однополостного гиперболоида, проходящие через его горловой эллипс, являются прямыми поступательного воздействия [1, 6, 8, 16].

3. Установлено, что область сопротивления корня зуба, состоящего из двух параболоидов, представляет собой две точки, одновременно принадлежащие двум плоскостям, содержащих прямые поступательного воздействия. Одной из таких плоскостей является плоскостью симметрии. Вторая плоскость перпендикулярна этой плоскости, но располагается не вертикально. Областью сопротивления корня зуба в форме параболоида с эллиптическим сечением, также являются две точки, расположенные на пересечении плоскостей симметрии, в которых лежат прямые поступательного воздействия. Областью сопротивления корня зуба в форме симметричного параболоида с круговым сечением областью сопротивления является одна точка (то есть существует единый центр сопротивления) [1, 2, 3, 4, 6, 7, 13, 15, 17].

4. Разработана методика визуализации различных типов перемещений корня зуба (наклонно-вращательного, вращательного и поступательного), основанная на использовании оси винтовой линии и определении перемещения корня зуба вдоль винтовой линии, который дает возможность прогнозировать и более детально визуализировать начальное перемещение зуба в пространстве относительно его исходного положения при заданной нагрузке [1, 7, 8, 12, 14].

5. Выведены соотношения, определяющие средние нормальные напряжения, возникающие при поступательном перемещении корня зуба в различных плоскостях. На основании значений напряжений, при которых не возникает болевых ощущений в периодонтальной связке, выполнен расчет соответствующих ортодонтических нагрузок [1, 2, 3, 5, 6, 13, 17].

6. Разработана аналитическая модель периодонтальной связки неравномерной толщины, позволяющая определять начальные перемещения корня зуба при действии сосредоточенной нагрузки и выполнить расчет возникающего при этом напряженно-деформированного состояния тканей периодонта [1, 4, 9].

Рекомендации по практическому использованию результатов диссертации

Полученные результаты могут быть использованы для прогнозирования и визуализации начальных перемещений зубов в периодонтальной связке, определения возникающего при этом напряженно-деформированного состояния и нахождения величин ортодонтической нагрузки, при которых отсутствуют болевые ощущения в периодонтальной связке. Предложенную модель можно использовать для разработки подходов к моделированию долгосрочного и краткосрочного перемещений зубов на основании распределения напряжений и деформаций в периодонтальной связке.



СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ

Монография

1. Босяков С.М. Реакция верхнечелюстного комплекса на ортодонтическую нагрузку / С.М. Босяков, Д.А. Гричанюк, Абдуфтах Фрхат Мселати. – Germany, Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2017. – 208 с.

Статьи в научных журналах

2. Босяков, С. М. Анализ условий поступательного перемещения корня зуба в линейно упругой периодонтальной оболочке / С.М. Босяков, Абдуфтах Фрхат Мселати // Механика машин механизмов и материалов. – 2013. – № 4. – С. 7–11.

3. Босяков, С. М. Определение условий начальных корпусных перемещений корня зуба в форме эллиптического гиперboloида / С.М. Босяков, Абдуфтах Фрхат Мселати // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – Выпуск 29. – С. 204–210.

4. Босяков, С. М. Определение центра сопротивления для корня зуба в форме кругового гиперboloида / С.М. Босяков, А.В. Круподеров, Абдуфтах Фрхат Мселати // Вестник БГУ, Серия 1. – 2014. – № 4. – С. 72–78.

5. Босяков, С. М. Моделирование напряженно-деформированного состояния периодонтальной связки при начальных перемещениях корня зуба / С.М. Босяков, А.Ф. Мселати, К.С. Юркевич // Вестник БГУ, Серия 1. – 2015. – № 1. – С. 84–89.

6. Bosiakov S. M. Mathematical modelling of initial displacements of the tooth root in hyperboloid of two-sheets form / S.M. Bosiakov, A.F. Mselati, A.V. Krupoderov // Russian Journal of Biomechanics. – 2015. – Vol. 19, No. 2. – P. 161–176.

7. Mselati, A.F. Conditions for translational movement of the composite paraboloid with one plane of symmetry / A.F. Mselati, S.M. Bosiakov // Computer Algebra Systems in Teaching and Research // Vol. V. Siedlce, University of Natural Sciences and Humanities. Poland, Siedlce, 2015. – P. 355–364.

8. Bosiakov, S. Regions of resistance for model of the single-rooted tooth: different symmetry cases / S. Bosiakov, A.F. Mselati // Russian Journal of Biomechanics. – 2015. – Vol. 19, No. 3. – P. 223–235.

9. Босяков, С.М. Аналитическая модель периодонтальной связки неравномерной толщины / С.М. Босяков, А.Ф. Мселати // Вестник Белорусского государственного университета, Серия 1. – 2016. – № 1. – С. 107–113.

10. Bosiakov, S. Translational displacements of the asymmetrical tooth root: region of resistance / S. Bosiakov, A.F. Mselati // In: Analytic methods of analysis and differential equations: AMADE 2015 (S.V. Rogosin, M.V. Dubatovskaya Eds.), Cambridge Scientific Publishers, 2016. – P. 17–26.

Материалы конференций

11. Босяков, С.М. Аналитическая модель начальных движений корня зуба в линейно упругой периодонтальной связке / С. М. Босяков, А.Ф. Мселати // *Материалы XI Всероссийской конференции с международным участием и школы-семинара для молодых ученых, 1 – 4 декабря 2014 г. Пермь, Издательство Пермского национального исследовательского политехнического университета, 2014. – С. 187–190.*

12. Босяков, С.М. Моделирование винтовой оси при начальных перемещениях корня зуба в линейно упругой периодонтальной связке / С.М. Босяков, Абдуфтах Фрхат Мселати // *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур / Під заг. ред. І.О. Луковського, Г.С. Кіта, Р.М. Кушніра. - Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С Підстригача НАН України, 2014. – С. 200–202.*

13. Мселати, А. Ф. Начальные перемещения корня зуба в несжимаемой линейно-упругой периодонтальной связке постоянной толщины / А.Ф. Мселати // *Сборник работ 71-й научной конференции студентов и аспирантов Белорусского государственного университета, Минск, 18 – 21 мая 2014 г.: в 3 ч. Ч. 1.–Минск: Изд. центр БГУ, 2014. – С. 14–18.*

Тезисы конференций

14. Босяков, С.М. Математическое моделирование начальных перемещений корня зуба в периодонтальной оболочке с использованием уравнения винтовой линии / С.М. Босяков, А.Ф. Мселати // *Тезисы XI Всероссийской конференции «Биомеханика-2014», г. Пермь, 1 – 4 декабря 2014 года, Издательство Пермского национального исследовательского политехнического университета. – С. 27.*

15. Bosiakov, S. M. The analytical model of a periodontal membrane in the form of an elliptical hyperboloid / S.M. Bosiakov, A.F. Mselati // *XLII Summer School–Conference «Advanced Problems in Mechanics», June 30–July 6, 2014, St. Petersburg (Repino), Russia / Book of Abstracts. Saint-Petersburg State University. 2014. – P. 21–22.*

16. Босяков, С.М. Условия приложения нагрузки для поступательного перемещения корня зуба / С.М. Босяков, А.Ф. Мселати // *XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Аннотации докладов. (Казань, 20 – 24 августа 2015 г.). – Казань: Издательство Академии наук РТ, 2015. – С.48–49.*

17. Мселати, А. Ф. Условия поступательного перемещения корня зуба с одной плоскостью симметрии / А.Ф. Мселати // *Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: Тез. докл. междунар. научн. семинара. 14 – 19 сентября 2015 г., Минск, Беларусь: Институт математики НАН Беларуси, 2015. – С. 63.*

РЭЗІЮМЭ

Мселати Абдуфтах Фрхат

Матэматычнае мадэляванне малых перамяшчэнняў
кораня зуба ў перыядантальнай звязцы

Ключавыя словы: корань зуба, перыядантальны звязак, паступальнае перасоўванне кораня зуба, вобласць супраціву, прамая паступальнага ўздзеяння, сярэдняе нармальнае напружанне.

Мэтай дысертацыйнай працы з'яўляецца распрацоўка аналітычнай мадэлі пачатковых перасоўванняў кораня зуба ў форме складовага парабалоіда ў перыядантальнай абалонцы пастаяннай і нераўнамернай таўшчыні; знаходжанне умоў паступальнага перамяшчэння кораня зуба ў форме складовага парабалоіда ў перыядантальнай абалонцы пастаяннай і няроўнамернай таўшчыні пры дзеянні малых па велічыні нарузак, распрацоўка падыхода да візуалізацыі пачатковых перасоўванняў кораня зуба, а таксама вызначэнне высілкаў і дэфармацый, якія ўзнікаюць пры перасоўваннях кораня зуба ў перыядантальнай абалонцы.

У якасці **метадаў даследавання** выкарыстаны метады механікі дэфармаванага цвёрдага цела, метады дыферэнцыяльнага і інтэгральнага вылічэння, метады лінейнай і вектарнай алгебры, метады канчатковых элементаў, а таксама выкарыстаны сертыфікаваны пакет *Mathematica* і праграмны комплекс ANSYS.

Новымі вынікамі з'яўляюцца фармулёўка умоў паступальнага перамяшчэння ў перыядантальнай звязцы асіметрычнага кораня зуба і кораня зуба з адной плоскасцю сіметрыі ў форме складовага парабалоіда, а таксама кораня ў форме парабалоіда з эліптычных і кругавым перасекам, метады трохмернай візуалізацыі нахільна-вярчальнага, вярчальнага і паступальнага перасоўванняў кораня зуба, заснаванага на ўжыванні ўраўненні восі шрубавай лініі, а таксама механіка-матэматычная мадэль пачатковых перасоўванняў кораня зуба ў перыядантальнай абалонцы нераўнамернай таўшчыні, якая дазваляе вызначаць цэнтр супраціву, а таксама напружана-дэфармаваны стан перыядантальнай звязцы, якое ўзнікае пры перасоўваннях кораня зуба.

Атрыманыя вынікі **рэкамендуецца выкарыстоўваць** для прагназавання і візуалізацыі пачатковага перамяшчэння зубоў пры дзеянні артадантычных сіл, знаходжання велічынь артадантычнай нарузкі, пры якіх адсутнічаюць болевыя адчуванні ў перыядантальнай звязцы. Прапанаваныя мадэлі можна выкарыстоўваць для распрацоўкі падыходаў да мадэлявання пачатковых і доўгатэрміновых перасоўванняў зубоў на падставе размеркавання высілкаў і дэфармацый.

Галіна прымянення атрыманых вынікаў з'яўляецца артадантычная і артапедычная стаматалогія.

РЕЗЮМЕ

Мселати Абдуфтах Фрхат

Математическое моделирование малых перемещений корня зуба в периодонтальной связке

Ключевые слова: корень зуба, периодонтальная связка, поступательное перемещение корня зуба, область сопротивления, прямая поступательного воздействия, среднее нормальное напряжение.

Целью диссертационной работы является разработка аналитической модели начальных перемещений корня зуба в форме составного параболоида в периодонтальной оболочке постоянной и неравномерной толщины; нахождение условий поступательного перемещения корня зуба в форме составного параболоида в периодонтальной оболочке постоянной и неравномерной толщины при действии малых по величине нагрузок, разработка подход к визуализации начальных перемещений корня зуба, а также определение напряжений и деформаций, возникающих при перемещениях корня зуба в периодонтальной связке.

В качестве **методов исследования** использованы методы механики деформируемого твердого тела, методы дифференциального и интегрального исчисления, методы линейной и векторной алгебры, метод конечных элементов, а также использованы сертифицированный пакет *Mathematica* и программный комплекс ANSYS.

Новыми результатами являются формулировка условий поступательного перемещения в периодонтальной связке асимметричного корня зуба и корня зуба с одной плоскостью симметрии в форме составного параболоида, а также корня в форме параболоида с эллиптическим и круговым сечением, методика трехмерной визуализации наклонно-вращательного, вращательного и поступательного перемещений корня зуба, основанного на применении уравнения оси винтовой линии, а также механико-математическая модель начальных перемещений корня зуба в периодонтальной связке неравномерной толщины, позволяющая определять положение центра сопротивления, а также напряженно-деформированное состояние периодонтальной связке, возникающее при перемещениях корня зуба.

Полученные результаты **рекомендуется использовать** для прогнозирования и визуализации начального перемещения зубов при действии ортодонтических сил, нахождения величин ортодонтической нагрузки, при которых отсутствуют болевые ощущения в периодонтальной связке. Предложенные модели можно использовать для разработки подходов к моделированию начальных и долгосрочных перемещений зубов на основании распределения напряжений и деформаций.

Областью применения полученных результатов является ортодонтическая и ортопедическая стоматология.

SUMMARY

Mselati Abduftah Frhat

Mathematical modelling of small displacements of the tooth root in the periodontal ligament

Key words: root of the tooth, periodontal ligament, translational displacement of the tooth root, region of resistance, line of translational impact, normal average stress.

The aim of the study is to develop an analytical model of the initial displacements of the tooth root in the form of a composite paraboloid and periodontal ligament of constant and non-uniform thickness; finding the conditions for the translational displacement of the tooth root in the form of a composite paraboloid in the periodontal membrane of constant and uneven-dimensional thickness under the action of small loads, developing an approach to visualizing the initial displacements of the tooth root, as well as evaluation of the stresses and strains during tooth root displacements in the periodontal ligament.

The methods of research were the methods of mechanics of a deformable solid, methods of differential and integral calculus, methods of linear and vector algebra, the finite element method, and the *Mathematica* and the ANSYS software were also used.

New results are the formulation of the conditions of translational displacements in the periodontal ligament of the asymmetric tooth root and the tooth root with one plane of symmetry in the form of a composite paraboloid, as well as the root in the form of a paraboloid with elliptical and circular cross section, the technique of three-dimensional visualization of the angular-rotational, rotational translational displacements of the tooth root, based on the use of the equation of the axis of the helix, as well as the mechanical-mathematical model of the initial displacements of the tooth root in the periodontal ligament with uniform and non-uniform thickness for evaluation the position of the center of resistance, and the stress-strain state of the periodontal ligament during the tooth root displacements.

The obtained results are recommended to be used for prediction and visualization of the initial displacements of teeth under the action of orthodontic forces, assessment of the orthodontic load values, at which there are no pain in the periodontal ligament. The proposed models can be used to develop approaches to modeling the initial and long-term movements of teeth based on the distribution of stresses and strains.

The field of application of the obtained results is orthodontic and orthopedic dentistry.

Научное издание

МСЕЛАТИ
Абдуфтах Фрхат

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
МАЛЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ КОРНЯ ЗУБА
В ПЕРИОДОНТАЛЬНОЙ СВЯЗКЕ**

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.02.08 – Биомеханика

Подписано в печать 27.11.2018. Формат 60×84¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 1,28. Уч.-изд. л. 1,00. Тираж 75. Заказ 989.

Издатель и полиграфическое исполнение: Белорусский национальный технический университет.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя
печатных изданий № 1/173 от 12.02.2014. Пр. Независимости, 65. 220013, г. Минск.