Государственное научное учреждение
«Институт математики Национальной академии наук Беларуси»

УДК 519.63

ВО
Тхи Ким Туен

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.07 — вычислительная математика

Минск, 2018

Работа выполнена в Белорусском государственном университете.

Научный руководитель:

МАТУС Петр Павлович
доктор физико-математических наук, профессор,
главный научный сотрудник отдела информационных технологий
Института математики Национальной академии наук Беларуси.

Официальные оппоненты:

ВАБИЩЕВИЧ Петр Николаевич
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий лабораторией «Численного моделирования
термомеханических процессов»
Института проблем безопасного развития атомной энергетики
Российской академии наук.

ЧУЙКО Михаил Матвеевич
кандидат физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник отдела вычислительной математики
Института математики Национальной академии наук Беларуси.

Оппонирующая организация:

Федеральное государственное учреждение
«Федеральный исследовательский центр Институт прикладной
математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук».

Защита состоится 10 мая 2018 г. в 13.30 на заседании совета по защите диссертаций Д 01.02.02 при Государственном научном учреждении «Институт математики Национальной академии наук Беларуси» по адресу: 220072, г. Минск, ул. Сурганова, 11. Телефон ученого секретаря: +375 17 284 17 81, e-mail: svl@im.bas-net.by.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики Национальной академии наук Беларуси.

Автореферат разослан ____ апреля 2018 г.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций Д 01.02.02,
кандидат физико-математических наук ____________ С.В. Лемешевский

Введение

Многие прикладные задачи описываются квазилинейными параболическими уравнениями с неограниченной нелинейностью. Вопросами существования и единственности решений начально-краевых задач для подобных уравнений занимались многие авторы, например, Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. , Фридман А. и другие.

В большинстве работ рассматривались начально-краевые задачи с граничными условиями определенного рода (первого, второго, либо третьего). Менее изученными являются дифференциальные задачи со смешанными граничными условиями.

Вследствие нелинейности уравнений единственным универсальным способом их решения являются численные методы, которые получили значительное распространение в связи с развитием вычислительной техники и широким ее использованием для решения научно-технических задач.

Одним из методов численного решения задач для параболических уравнений является метод конечных разностей. При этом вычислительные методы, удовлетворяющие сеточному аналогу принципа максимума называются *монотонными*. Монотонные разностные схемы играют важную роль при математическом моделировании прикладных задач, так как они позволяют получить численное решение без нефизических осциллияций. В работах Самарского А.А., Вабищевича П.П., Гулина А.В., Матуса П.П. строятся и исследуются монотонные разностные схемы, аппроксимирующие начально-краевые задачи для линейных параболических уравнений с граничными условиями определенного вида.

При построении вычислительных алгоритмов для параболических уравнений с краевыми условиями второго и третьего рода важно сохранить второй порядок аппроксимации и точности по пространственным переменным.

Поэтому актуальной является задача построения разностных схем второго порядка точности с сохранением свойств монотонности для квазилинейной параболической задачи со смешанными граничными условиями Дирихле-Неймана.

При исследовании монотонности разностных схем, аппроксимирующих квазилинейные параболические уравнения, возникает необходимость доказательства принадлежности приближенного решения окрестности области значений точного решения, т. е. $y \in D_u$. Для достижения этой цели в работе используются доказанные двусторонние оценки разностного решения, которые обобщают принцип максимума. Кроме того, двусторонние оценки гарантируют попадание решения в область определения задачи для уравнений с неограниченной нелинейностью.

Исследованию монотонных разностных схем для линейных эллиптических и параболических урванений в скалярном случае посвящено большое число работ, например, работы Самарского А.А., Вабищевича П.П., Гулина А.В., Матуса П.П. Однако работы по разработке аналогичных алгоритмов для систем параболических и эллиптических уравнений отсутствуют. Поэтому актуальной является также задача разработки теории монотонных разностных схем, аппроксимирующих квазилинейные параболические системы уравнений.

Настоящая диссертационная работа посвящена построению и исследованию монотонных разностных схем для линейных и квазилинейных параболических уравнений с граничными условиями смешанного типа Дирихле-Неймана. Важными результатами являются двусторонние оценки сеточного решения, которые зависят только от входных данных и априорные оценки в равномерной норме C. Кроме того доказываются оценки для погрешности метода в сеточных аналогах норм C, L_2 и W_2^1, которые гарантируют сходимость разностного решения со вторым порядком по пространственным переменным и первым порядком по временной переменной.

Полученные результаты обобщаются на случай построения аналогичных алгоритмов для одномерной линейной и нелинейной модели Био. В настоящее время модель Био часто используется в геомеханике, гидрологии, нефтяном машиностроении, биомеханике и других областях.

Заключительная часть диссертации посвящена исследованию монотонности разностной схемы, аппроксимирующей двумерную квазилинейную параболическую систему уравнений с нелинейностями неограниченного роста, а также исследованию монотонных разностных схем для одномерной модели Шнэкенберга. Эта модель играет важную роль при математическом моделировании прикладных задач физической химии и биологии.

Общая характеристика работы

Связь работы с крупными научными программами (проектами) и темами. Работа выполнена на кафедре вычислительной математики Белорусского государственного университета. Тема диссертации утверждена решением Ученого совета факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета от 19.06.2014, протокол № 9, соответствует направлению 12.1 перечня приоритетных направлений фундаментальных и прикладных научных исследований Республики Беларусь на 2011–2015 годы «Физические и математические методы и их применение для решения актуальных проблем естествознания, техники, новых технологий, экономики и социальных наук». Исследования проводились в соответствии с заданиями следующих программ и тем:

– Государственная программа научных исследований (« Конвергенция – 2020 ») на 2016–2020 г.г. — задание 1.5.01 «Численные методы и параллельные алгоритмы решения задач для дифференциальных уравнений», № госрегистрации 20160176;

– Задание 1.5.01.1 «Методы с обратной связью численного решения начальных задач», № госрегистрации 20162271.

Цель и задачи исследования. Целью диссертационной работы является построение и исследование монотонных разностных схем, аппроксимирующих квазилинейные параболические уравнения со смешанными граничными условиями Дирихле-Неймана и доказательство сходимости разностных решений к решению исходной дифференциальной задачи; построение и исследование монотонных разностных схем для одномерной задачи пороупругости; построение и исследование монотонных разностных схем для двумерной квазилинейной параболической системы уравнений с нелинейностями неограниченного роста; установление двусторонних оценок решений этих схем.

Для достижения этой цели в ходе работы над диссертацией были поставлены следующие задачи:

– построить и исследовать монотонные разностные схемы для линейных и квазилинейных параболических уравнений с граничными условиями смешанного типа в одномерном и двумерном случаях;

– построить и исследовать монотонные разностные схемы для модели Био;

– построить и исследовать монотонные разностные схемы для двумерной квазилинейной параболической системы уравнений с нелинейностями неограниченного роста и модели Шнэкенберга.

Объект исследования — разностные схемы, аппроксимирующие квазилинейные параболические уравнения со смешанными граничными условиями Дирихле-Неймана и двумерную квазилинейную параболическую систему уравнений с нелинейностями неограниченного роста. Предмет исследования — монотонность разностных схем, сходимость и двусторонние оценки решений этих схем.

Научная новизна. Все результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми. Их новизна состоит в том, что

1. для одномерного и двумерного параболических уравнений со смешанными граничными условиями Дирихле-Неймана построены монотонные разностные схемы с использованием полуцелых узлов при аппроксимации граничных условий второго рода, получены двусторонние оценки разностных решений, которые зависят только от входных данных, доказана скорость сходимости метода второго порядка по пространственной переменной и первого порядка по временной переменной в сеточных аналогах норм C, L_2, W_2^1;

2. для линейной и нелинейной одномерной модели Био построены монотонные разностные схемы аналогичным методом и получены двусторонние оценки разностных решений, доказана сходимость метода в сеточных аналогах норм C, L_2 и получены численные решения без нефизических осцилляций;

3. для двумерной квазилинейной параболической системы уравнений с нелинейностями неограниченного роста построены монотонные разностные схемы второго порядка аппроксимации по пространственным переменным и получены двусторонние оценки разностных решений.

Положения, выносимые на защиту. В настоящей диссертационной работе получены и выносятся на защиту следующие результаты:

1. монотонные разностные схемы для одномерного и двумерного параболических уравнений со смешанными граничными условиями Дирихле-Неймана, двусторонние оценки разностных решений, которые зависят только от входных данных, сходимость решения разностной схемы к точному решению исходной дифференциальной задачи;

2. монотонные разностные схемы для линейной и нелинейной одномерной модели Био, двусторонние оценки разностных решений, оценки точности разностных решений в сеточных аналогах норм C, L_2;

3. монотонные разностные схемы для двумерной квазилинейной параболической системы уравнений с нелинейностями неограниченного роста, двусторонние оценки разностных решений и монотонные разностные схемы для одномерной модели Шнэкенберга.

Личный вклад соискателя ученой степени. Результаты, представленные в диссертации, получены лично соискателем под руководством научного руководителя, доктора физико-математических наук, профессора Матуса П.П. С научным руководителем соотвевствующие результаты получены на паритетных условиях. Вычислительные эксперименты, представленные в третьей главе на основе работ [1, 2], получены совместно с профессором Гаспаром Ф.Ж.(Gaspar F.J.). В диссертационную работу не вошли результаты, полученные в соавторстве с Л.М. Хиеу в работах [4, 6].

Апробация диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

– на 73 Научной конференции студентов и аспирантов БГУ (г. Минск, 2016);

– на Международной конференции «XII Белорусская математическая конференция» (г. Минск, 2016);

– на Научно-практической конференции «Вычислительные методы, модели и образовательные технологии» (г. Брест, 2016);

– на XIII Международной научной конференции молодых ученых «Молодежь в науке – 2016» (г. Минск, 2016);

– на Научно-практической конференции «Вычислительные методы, модели и образовательные технологии» (г. Брест, 2017).

Опубликование результатов диссертации. Материалы диссертации опубликованы в 11 печатных работах, из них 6 в рецензируемых изданиях, включенных в перечень ВАК РБ (общим объемом - 2,38 авторских листа), 5 работы в сборниках тезисов конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из оглавления, введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения и библиографического списка.

В первой главе дан исторический обзор по основным вопросам, рассматриваемым в диссертационной работе.

Вторая глава посвящена построению монотонных разностных схем для параболических уравнений со смешанными граничными условиями Дирихле-Неймана. В основе конструкции лежит идея использования полуцелых узлов в граничных точках задания краевых условий второго рода. Кроме этого установлены двусторонние оценки численного решения, на основании которого можно сделать вывод об устойчивости алгоритма в равномерной норме C. Доказана скорость сходимости разностного решения к точному решению в сеточных аналогах норм C, L_2 и W_2^1.

В третьей главе построены и исследованы монотонные разностные схемы для модели Био на основе полученных результатов второй главы. Установлены двусторонние оценки разностных решений через входные данные задач. Доказана сходимость разностных решений в сеточных аналогах норм C и L_2 со вторым порядком по пространственной переменной для линейной и нелинейной задач, соответсвенно. Представлены результаты вычислительных экспериментов, подтверждающие эффективность предложенных методов.

В четвертой главе построена и исследована монотонная разностная схема для двумерной квазилинейной параболической системы уравнений с нелинейностями неограниченного роста. Введенны каноническая форма векторно-разностных схем и определение ее монотонности. Доказана ее разрешимость. Установлена двусторонняя оценка разностного решения таких векторно-разностных уравнений и доказана важная априорная оценка в равномерной норме C. Кроме этого, построены и исследованы монотонные разностные схемы для одномерной модели Шнэкенберга.

Объем диссертации составляет 123 страницы, включая 6 рисунков и 4 таблицы, встроенных в текст. Библиографический список на 10 страницах включает 92 источников (с учетом 11 публикаций соискателя).

Основное содержание

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы и представлены результаты, полученные в работе.

В **главе 1** дается аналитический обзор литературы по теме исследований.

Глава 2 посвящена построению и исследованию монотонных разностных схем для линейных и квазилинейных параболических уравнений с граничными условиями смешанного типа в одномерном и двумерном случаях, т.е. рассматривается случай, когда на одной части границы задаются условия Дирихле, а на другой - Неймана.

В области $\bar{Q}_T = \big\{(x,t) : 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T\big\}$ рассматривается квазилинейное параболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial x} + f(x,t), \quad x \in \Omega = (0,l), \quad t \in (0,T] \tag{1}$$

с начальными и смешанными граничными условиями

$$\begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x), \quad x \in [0,l], \\ u(0,t) &= \mu(t), W(l,t) = 0, \quad t \in (0,T], \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$W(x,t) = k(u)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Предполагается, что функции $k(u)$ и $f(x,t)$ достаточно гладкие, причем решение $u(x,t) \in C^{4,2}(Q_T)$. Согласно определению А. Фридмана [1] уравнение (1) называется параболическим, если существуют такие положительные константы k_1, k_2, что коэффициент $k(u)$ ограничен снизу и сверху

$$0 < k_1 \le k(u) \le k_2, \quad \forall u \in \bar{D}_u \tag{3}$$

и

$$k(u) \in C^2(\bar{D}_u), \quad \bar{D}_u = \{u(x,t) : m_3 \le u(x,t) \le m_4, (x,t) \in Q_T\},$$

где m_3 и m_4 являются константами

$$m_3 = \min\left\{\min_{t\in(0,T]} \mu(t), \min_{x\in[0,l]} u_0(x)\right\} + T\min\left\{0, \min_{\substack{x\in(0,l)\\ t\in(0,T]}} f(x,t)\right\},$$

[1] *Фридмана, А.* Уравнения с частными производными параболического типа./ А. Фридман // М.: Мир. — 1968. — 428 С.

$$m_4 = \max\left\{\max_{t\in(0,T]}\mu(t), \max_{x\in[0,l]}u_0(x)\right\} + T\max\left\{0, \max_{\substack{x\in(0,l)\\ t\in(0,T]}} f(x,t)\right\}.$$

Пусть на отрезке $[0,l]$ задана равномерная пространственная сетка $\bar{\omega}_h$, содержащая одновременно целые и полуцелые узлы:

$$\bar{\omega}_h = \left\{x_i = ih,\ i = 0,\dots,N;\quad x_{i+1/2} = (i+1/2)h,\ i = 0,\dots N,\ h = \frac{l}{N+1/2}\right\}. \tag{4}$$

Аналогично на отрезке $[0,T]$ вводится временная сетка с постоянным шагом τ:

$$\bar{\omega}_\tau = \left\{t_n = n\tau,\ n = 0,\dots,N_0,\ \tau = \frac{T}{N_0}\right\}. \tag{5}$$

На сетке $\bar{\omega}_h$ задаются нормы и скалярные произведения в пространстве сеточных функций

$$\|y\|_C = \max_{1\le i\le N}|y_i|, \quad \|y\|_{\bar{C}} = \max_{0\le i\le N}|y_i|, \tag{6}$$

$$(y,v) = \sum_{i=1}^{N} hy_iv_i, \quad \|y\| = \sqrt{(y,y)}. \tag{7}$$

На равномерной сетке $\bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$ дифференциальную задачу (1) - (2) аппроксимируем линеаризованной разностной схемой

$$y^n_{t,i} = \frac{W^{n+1}_{h,i+1/2} - W^{n+1}_{h,i-1/2}}{h} + f^{n+1}_i, \quad i = 1,\dots,N, \tag{8}$$

$$y^0_i = u_0(x_i), \quad i = 0,\dots,N, \tag{9}$$

$$y^{n+1}_0 = \mu^{n+1}, \quad W^{n+1}_{h,N+1/2} = 0, \tag{10}$$

где

$$W^{n+1}_{h,i-1/2} = a^n_i y^{n+1}_{\bar{x},i}.$$

$$a(y^n_i) = \frac{1}{2}\left(k(y^n_{i-1}) + k(y^n_i)\right), \quad f^{n+1}_i = f(x_i, t_{n+1}), \quad i = 1,\dots,N.$$

Подставим уравнение (10) в уравнение (8) при $i = N$. Запишем теперь эту схему в каноническом виде

$$A^n_i y^{n+1}_{i-1} - C^n_i y^{n+1}_i + B^n_i y^{n+1}_{i+1} = -F^n_i, \quad i = 1,\dots,N-1, \tag{11}$$

$$y^{n+1}_0 = \mu^{n+1}, \quad C^n_N y^{n+1}_N = A^n_N y^{n+1}_{N-1} + F^n_N, \tag{12}$$

где

$$A_i^n = \frac{\tau}{h^2} a_i^n, \quad B_i^n = A_{i+1}^n, \quad C_i^n = 1 + A_i^n + B_i^n, \quad i = 1, \ldots, N-1, \tag{13}$$

$$F_i^n = y_i^n + \tau f_i^{n+1}, \quad f_i^{n+1} = f(x_i, t_{n+1}), \quad i = 1, \ldots, N-1, \tag{14}$$

$$A_N^n = \frac{\tau}{h^2} a_N^n, \quad C_N = 1 + A_N^n, \quad F_N^n = y_N^n + \tau f_N^{n+1}. \tag{15}$$

Разностные схемы, удовлетворяющие условиям положительности коэффициентов $A_i^n > 0, \quad B_i^n > 0, \quad D_i^n = C_i^n - A_i^n - B_i^n > 0, \quad i = 1, \ldots, N-1$ принято называться монотонными [2].

Доказывается следующая важная теорема о свойствах разностного решения, обобщающая принцип максимума.

Теорема 2.5 [2] *Если коэффициенты разностной схемы* (11)-(12) *удовлетворяют условиям*

$$A_i^n > 0, \quad B_i^n > 0, \quad C_i^n - A_i^n - B_i^n = 1, \quad i = 1, \ldots, N-1, \tag{16}$$

$$A_N^n > 0, \quad B_N^n = 0, \quad C_N^n - A_N^n = 1, \tag{17}$$

то справедливы следующие оценки для разностного решения

$$\min\{\mu^{n+1}, \min_{1 \le i \le N} F_i^n\} \le y_i^{n+1} \le \max\{\mu^{n+1}, \max_{1 \le i \le N} F_i^n\}, \ i = 0, \ldots, N. \tag{18}$$

Следствие 2.3 [2] *Разностная схема* (8) - (10) *монотонна и для ее решения* y^{n+1} *справедлива следующая двусторонняя оценка, согласованная с оценкой для решения дифференциальной задачи*

$$m_{3,h} \le y_i^{n+1} \le m_{4,h}, \ i = 0, \ldots, N,$$

где

$$m_{3,h} = \min\left\{\min_{0 \le k \le N_0 - 1} \mu^{k+1}, \min_{1 \le i \le N} u_{0i}\right\} + T \min\left\{0, \min_{\substack{1 \le i \le N \\ 0 \le k \le N_0 - 1}} f_i^{k+1}\right\},$$

$$m_{4,h} = \max\left\{\max_{0 \le k \le N_0 - 1} \mu^{k+1}, \max_{1 \le i \le N} u_{0i}\right\} + T \max\left\{0, \max_{\substack{1 \le i \le N \\ 0 \le k \le N_0 - 1}} f_i^{k+1}\right\}.$$

[2] *Самарский, А. А.* Теория разностных схем./ А. А. Самарский. // М.: Наука. — 1971. — 616 с.

Устанавливается априорная оценка разностного решения в равномерной норме.

Теорема 2.6 [2] *Для решения разностной задачи* (8) - (10) *имеет место неравенство для всех* $, n = 0, \dots, N_0 - 1$

$$\left\| y^{n+1} \right\|_{\bar{C}} \leq \max \left\{ \max_{0 \leq k \leq N_0 - 1} \left| \mu^{k+1} \right|, \|u_0\|_{\bar{C}} \right\} + T \max_{0 \leq k \leq N_0 - 1} \left\| f^{k+1} \right\|_{C}. \tag{19}$$

В линейном случае из оценки (19) следует устойчивость разностной схемы.

Имеет место следующее утверждение о скорости сходимости разностного решения в сеточной норме L_2.

Теорема 2.7 [2] *Решение разностной схемы* (8) – (10) *сходится в сеточной норме* L_2 *со вторым порядком по пространственной переменной и с первым порядком по временной переменной и для всех* $n = 1, \dots, N_0 - 1$ *имеет место следующая оценка точности*

$$\left\| z^{n+1} \right\| \leq c \left(h^2 + \tau \right). \tag{20}$$

По аналогии строятся и исследуются монотонные разностные схемы для двумерного линейного и квазилинейного параболического уравнения со смешанными граничными условиями типа Дирихле-Неймана.

В **главе 3** на основе результатов **главы 2** строятся и исследуются монотонные разностные схемы для модели Био [3] [4].

Требуется найти функцию смещения $u(x, t)$ и поровое давление $p(x, t)$, удовлетворяющие уравнениям

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left((\lambda + 2\mu) W_u \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T], \tag{21}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi \beta p + W_u) - \frac{\partial W_p}{\partial x} = q(x, t), \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T], \tag{22}$$

$$(\phi \beta p + W_u)(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l] \tag{23}$$

$$p(0, t) = \mu_0(t), \quad (\lambda + 2\mu) W_u(0, t) = -s_0(t) \tag{24}$$

$$u(l, t) = \mu_1(t), \quad W_p(l, t) = 0, \tag{25}$$

[3] *Gaspar, F. J.* A finite difference analysis of biot's consolidation model./ F. J. Gaspar, F. J. Lisbona, P. N. Vabishchevich // Appl. Numer. Math. — 2003. — Vol.44 — P 487-506.

[4] *Boal, N.* Finite difference analysis of a double-porosity consolidation model./ N. Boal, F. J. Gaspar, F. J. Lisbona, P. N. Vabishchevich // Numer. Methods Partial Differential Equations. —2012. —Vol. 28. — P 138-154

где

$$W_u(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t), \quad W_p(x,t) = k(p)\frac{\partial p}{\partial x}(x,t),$$

$u = u(x,t)$ - функция смещения твердого вещества, $p = p(x,t)$ - поровое давление жидкости, $\lambda, \mu = const > 0$ - коэффициенты Ламе, ϕ - пористость, β - коэффициент сжимаемости жидкости, $\kappa, \eta = const > 0$ - проницаемость пористой среды и вязкость, соответственно, $q(x,t)$ - процесс инъекции или извлечения. Предполагается, что коэффициенты $\phi, \beta \geq 0$.

После некоторых преобразований из системы (21) - (25) можно получить две независимые задачи для давления $p(x,t)$ и функции смещения $u(x,t)$. Задача для давления будет иметь вид параболического уравнения с заданными смешанными граничными условиями Дирихле-Неймана:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c_1 \frac{\partial W_p}{\partial x} = f(x,t), \quad x \in \Omega = (0,l), \quad t \in (0,T], \tag{26}$$

$$p(x,0) = c_4(\mu_0(0) + s_0(0)), \quad x \in \bar{\Omega}, \tag{27}$$

$$p(0,t) = \mu_0(t), \quad W_p(l,t) = 0, \quad t \in (0,T]. \tag{28}$$

При этом предполагаем, что

$$p(x,t) \in C^{4,2}(Q_T), u(x,t) \in C^{3,2}(Q_T),$$

$$0 < k_3 \leq k(p) \leq k_4, \quad \forall p \in [\tilde{m}_3, \tilde{m}_4],$$

где $\tilde{m}_3$ и $\tilde{m}_4$ константы, имеющие виды

$$\tilde{m}_3 = \min\left\{\min_{t\in(0,T]} \mu_0(t), c_1(\mu_0(0) + s_0(0))\right\} + T\min\left\{0, \min_{\substack{x\in(0,l)\\ t\in(0,T]}} f(x,t)\right\},$$

$$\tilde{m}_4 = \max\left\{\max_{t\in(0,T]} \mu_0(t), c_1(\mu_0(0) + s_0(0))\right\} + T\max\left\{0, \max_{\substack{x\in(0,l)\\ t\in(0,T]}} f(x,t)\right\}.$$

Соотвествующая дифференциальная задача для функции смещения записывается в виде

$$W_u(x,t) = \frac{1}{(\lambda + 2\mu)}\left(p(x,t) - \mu_0(t) - s_0(t)\right), \quad x \in (0,l), \quad t \in [0,T], \tag{29}$$

$$u(l,t) = \mu_1(t). \tag{30}$$

Разностная схема для задачи давления представляется в каноническом виде:

$$A_i^n p_{h,i-1}^{n+1} - C_i^n p_{h,i}^{n+1} + B_i^n p_{h,i+1}^{n+1} = -F_i^n, \quad i = 1, \ldots, N-1, \tag{31}$$

$$p_{h,i}^0 = c_3(\mu_0^0 + s_0^0), \tag{32}$$

$$p_{h,0}^{n+1} = \mu_0^{n+1}, \quad C_N^n p_{h,N}^{n+1} = A_N^n p_{h,N-1}^{n+1} + F_N^n, \tag{33}$$

в котором сооствествующие коэффициенты определаются подобным образом.

Задача для функции смещения (29) - (30) аппроксимируется следующей разностной схемой:

$$u_{h,N+1/2}^{n+1} = \mu_1^{n+1}, \tag{34}$$

$$u_{h,i-1/2}^{n+1} = u_{h,N+1/2}^{n+1} - c_2 \left(\sum_{k=i}^{N} h p_{h,k}^{n+1} - (l - x_{i-1/2})(\mu_0^{n+1} + s_0^{n+1}) \right), \tag{35}$$

$$i = 1, \ldots, N.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.3 [2] *Разностная схема (31) - (33) монотонна и для ее решения имеет место двусторонняя оценка:*

$$\bar{m}_3 \le p_{h,i}^{n+1} \le \bar{m}_4, \quad i = 0, \ldots, N, \tag{36}$$

кроме того, для решения задачи (34) - (35) справедливы неравенства:

$$u_{h,i+1/2}^{n+1} \ge \mu_1^{n+1} - c_2(l - x_{i+1/2}) \left(\bar{m}_4 - \mu_0^{n+1} - s_0^{n+1} \right), \tag{37}$$

$$u_{h,i+1/2}^{n+1} \le \mu_1^{n+1} - c_2(l - x_{i+1/2}) \left(\bar{m}_3 - \mu_0^{n+1} - s_0^{n+1} \right), \tag{38}$$

$$i = 0, \ldots, N,$$

где константы $\bar{m}_3$ и $\bar{m}_4$ зависят только от входных данных задачи и имеют вид:

$$\bar{m}_3 = \min \left\{ \min_{0 \le k \le N_0 - 1} \mu_0^{k+1}, c_1(\mu_0^0 + s_0^0) \right\} + T \min \left\{ 0, \min_{\substack{1 \le i \le N \\ 0 \le k \le N_0 - 1}} f_i^{k+1} \right\},$$

$$\bar{m}_4 = \max \left\{ \max_{0 \le k \le N_0 - 1} \mu_0^{k+1}, c_1(\mu_0^0 + s_0^0) \right\} + T \max \left\{ 0, \max_{\substack{1 \le i \le N \\ 0 \le k \le N_0 - 1}} f_i^{n+1} \right\}.$$

Для погрешности метода для давления $z_{p,i} = p_{h,i} - p_i$, $i = 0, \ldots, N$ и для смещения $z_{u,i+1/2} = u_{h,i+1/2} - u_{i+1/2}$, $i = 0, \ldots, N$ доказываются следующие оценки:

$$\left\| z_p^{n+1} \right\| \le c(h^2 + \tau), \quad \left\| z_u^{n+1} \right\|_{\bar{C}} \le c(h^2 + \tau).$$

В **главе 4** строится и исследуется монотонная разностная схема, аппроксимирующая двумерную квазилинейную параболическую систему уравнений с нелинейностями неограниченного роста. Кроме этого, строятся и исследуются монотонные разностные схемы для одномерной модели Шнэкенберга.

В области $\bar{Q}_T = \bar{\Omega} \times (0, T], \bar{\Omega} = \{0 \le x_1 \le l_1,\ 0 \le x_2 \le l_2\}$ рассматривается следующая начально-краевая задача для системы квазилинейных параболических уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \mathcal{L}U + \mathcal{C}U + G(x, t), \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \le T \tag{39}$$

с граничными условиями Дирихле

$$U(x, t) = \mu(x, t), \quad x \in \partial\Omega, \quad 0 < t \le T, \tag{40}$$

и начальным условием

$$U(x, 0) = U_0(x), x \in \bar{\Omega}, \tag{41}$$

где $U(x,t) = \big(u_1(x,t), u_2(x,t), \ldots, u_m(x,t)\big)^T$ - искомая векторная функция, $G(x,t) = \big(g_1(x,t), g_2(x,t), \ldots, g_m(x,t)\big)^T$, $x \in \Omega$ - вектор правой части и $\mu(x,t) = \big(\mu_1(x,t), \mu_2(x,t), \ldots, \mu_m(x,t)\big)^T$, $x \in \partial\Omega$ - заданный вектор. $\mathcal{L}$ - диагональный оператор $\mathcal{L} = diag\,(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_m)$,

$$\mathcal{L}_p u_p = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{p\alpha}(U) \frac{\partial u_p}{\partial x_\alpha} \right), \quad p = 1, \ldots, m,$$

$$k_{p\alpha}(U) = k_{p\alpha}\,(u_1, u_2, \ldots, u_m)\,.$$

Предполагается, что матрица $\mathcal{C} = \big(c_{pj}\big)_{m\times m}$ является постоянной и удовлетворяет условию

$$c_{pp} \le 0, \quad c_{pj} \ge 0,\ p \ne j, \quad \sum_{j=1}^{m} c_{pj} \le 0, \quad p = 1, \ldots, m. \tag{42}$$

Кроме этого, предполагаем, что входные данные неотрицательные $F_1(x,t) \geq 0$, $\mu(x,t) \geq 0$, $U_0(x) \geq 0$ и каждая функция $k_{p\alpha}$, $p = 1,\ldots,m$, $\alpha = 1,2$ ограничена снизу и сверху

$$0 < k_{min} \leq k_{p\alpha}(U) \leq k_{max}, \quad \forall U = \left(u_p\right)_{p=1}^{m}, \quad u_p \in [m_7, m_8], \tag{43}$$

где постоянные m_7 и m_8 определяются следующим образом

$$m_7 = e^{-Tc} \min \left\{ \min_{\substack{x\in\partial\Omega \\ t\in(0,T]}} \mu(x,t), \min_{x\in\bar{\Omega}} U_0(x) + T \min_{(x,t)\in Q_T} G(x,t) \right\},$$

$$m_8 = \max \left\{ \max_{\substack{x\in\partial\Omega \\ t\in(0,T]}} \mu(x,t), \max_{x\in\bar{\Omega}} U_0(x) \right\} + T \max_{(x,t)\in Q_T} G(x,t),$$

$$c = \max_{1\leq p\leq m} \left(-\sum_{j=1}^{m} c_{pj} \right) \geq 0, \quad Q_T = \Omega \times (0,T].$$

Построим в $\bar{\Omega}$ равномерную пространственную сетку $\bar{\omega}_h$

$$\bar{\omega}_h = \left\{ x_{i_1 i_2} = (i_1 h_1, i_2 h_2), i_\alpha = 0,\ldots,N_\alpha,\ \alpha = 1,2 \right\} \setminus \left\{ (0,0),(0,l_2),(l_1,0),(l_1,l_2) \right\}$$

и равномерную временную сетку $\bar{\omega}_\tau$ (5).

На сетке $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$ аппроксимируем начально-краевую задачу (39) - (41) следующей векторно-разностной схемой

$$Y_t^n = L_h Y^{n+1} + \mathcal{C} Y^{n+1} + G^{n+1}(x), \quad x \in \omega_h, n = 0,\ldots,N_0 - 1, \tag{44}$$

$$Y^0 = U_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \tag{45}$$

$$Y^{n+1} = \mu(x, t_{n+1}), \quad x \in \partial\omega_h, \quad n = 0,\ldots,N_0 - 1, \tag{46}$$

где $Y(x,t) = \left(y_1(x,t),\ y_2(x,t),\ldots,y_m(x,t)\right)^T$ - искомая сеточная векторная функция,

$$Y_t^n(x,t) = \left(y_{1t}^n(x,t),\ y_{2t}^n(x,t),\ldots,y_{mt}^n(x,t)\right)^T.$$

Дискретный оператор L_h является диагональным оператором

$$L_h = diag(L_{1h},\ L_{2h},\ldots,L_{mh}),$$

$$L_{ph}y_{p,i_\alpha}^{n+1} = \sum_{\alpha=1}^{2}\left(a_{p\alpha}(Y_{i_\alpha}^n)y_{p,\bar{x}_\alpha}^{n+1}\right)_{x_\alpha,i_\alpha}, \quad p=1,\dots,m, \quad \alpha=1,2,$$

где

$$\left(a_{p\alpha}(Y_{i_\alpha}^n)y_{p,\bar{x}_\alpha}^{n+1}\right)_{x_\alpha,i_\alpha} = a_{p\alpha,i_\alpha+1}\frac{y_{p,i_\alpha+1}^{n+1}-y_{p,i_\alpha}^{n+1}}{h_\alpha^2} - a_{p\alpha,i_\alpha}\frac{y_{p,i_\alpha}^{n+1}-y_{p,i_\alpha-1}^{n+1}}{h_\alpha^2},$$

$$a_{p\alpha,i_\alpha} = \frac{1}{2}\left(k_{p\alpha}(Y_{i_\alpha-1}^n)+k_{p\alpha}(Y_{i_\alpha}^n)\right).$$

Разностную схему (44) - (46) можно переписать в следующем виде

$$A_{i_1i_2}^nY_{i_1i_2}^{n+1} = B_{1,i_1i_2}^nY_{i_1-1i_2}^{n+1} + B_{2,i_1i_2}^nY_{i_1i_2-1}^{n+1} + B_{3,i_1i_2}^nY_{i_1+1i_2}^{n+1} + B_{4,i_1i_2}^nY_{i_1i_2+1}^{n+1}$$
$$+F_{i_1i_2}^n, \quad i_\alpha = 1,\dots,N_\alpha-1, \quad \alpha=1,2, \tag{47}$$

$$Y_{0i_2}^{n+1} = \mu_{i_2}^{1,n+1}, \quad Y_{i_10}^{n+1} = \mu_{i_1}^{2,n+1}, \quad Y_{N_1i_2}^{n+1} = \mu_{i_2}^{3,n+1}, \quad Y_{i_1N_2}^{n+1} = \mu_{i_1}^{4,n+1}, \tag{48}$$

где $A_{i_1i_2}^n = \left(a_{pj}^1(x_{i_1},x_{i_2},t_n)\right)_{m\times m}$ - матрица m-ого порядока, матрицы $B_{j,i_1i_2}^n$, $j = 1,\dots,4$ являются диагональными матрицами. Вектор $F_{i_1i_2}^n = \tau G_{i_1i_2}^{n+1} + Y_{i_1i_2}^n$.

Векторно-разностная схема (47) - (48) называется канонической формой векторно-разностной схемы для двумерной квазилинейной параболической системы уравнений.

Определение. 4.3 [4, 6] Векторно-разностная схема (47) - (48) называется монотонной, если для ее решения выполнены следующие условия:

если $F(x)\geq 0,\ \forall x\in\omega_h$ и $\mu(x)\geq 0,\ \forall x\in\partial\omega_h$, то $Y(x)\geq 0,\ \forall x\in\bar{\omega}_h$,

если $F(x)\leq 0,\ \forall x\in\omega_h$ и $\mu(x)\leq 0,\ \forall x\in\partial\omega_h$, то $Y(x)\leq 0,\ \forall x\in\bar{\omega}_h$.

Далее перепишем разностную схему (47) - (48) в виде

$$A_{1,i_1i_2}^nY_{i_1i_2}^{n+1} = B_{1,i_1i_2}^nY_{i_1-1i_2}^{n+1} + B_{2,i_1i_2}^nY_{i_1i_2-1}^{n+1} + B_{3,i_1i_2}^nY_{i_1+1i_2}^{n+1} + B_{4,i_1i_2}^nY_{i_1i_2+1}^{n+1}$$
$$+ C_1Y_{i_1i_2}^{n+1} + F_{i_1i_2}^n, \quad i_\alpha = 1,\dots,N_\alpha-1,\ \alpha=1,2, \tag{49}$$

$$Y^{n+1}(x) = \mu^{n+1}(x), \quad x\in\partial\omega_h, \tag{50}$$

где

$$A_{i_1i_2}^n = A_{1,i_1i_2}^n - C_1.$$

Матрица $A_{1,i_1i_2}^n = diag\left(a_{11,i_1i_2}^{1,n},\ a_{22,i_1i_2}^{1,n},\dots,a_{mm,i_1i_2}^{1,n}\right)$ -диагональная матрица, состоящая из диагональных элементов матрицы $A_{i_1i_2}^n$.

Элементы матрицы $C_1 = \left(c_{pj}^1\right)_{m\times m}$ определяются следуюшим образом

$$c_{pj}^1 = -a_{pj,i_1i_2}^{1,n} = \tau c_{pj},\ \forall p\neq j,$$

$$c^1_{pp} = 0,\ p, j = 1, \ldots, m.$$

Введем диагональную матрицу $D = diag\,(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{mm})$, определяемую следующим образом:

$$d_{pp} = a^{1,n}_{pp,i_1 i_2} - \left(\sum_{j=1}^{4} b^{j,n}_{pp,i_1 i_2} + \sum_{j \neq p, j=1}^{m} a^{1,n}_{pj,i_1 i_2} \right) = 1 - \tau \sum_{j=1}^{m} c_{pj} \geq 1,$$

$$i_\alpha = 1, \ldots, N_\alpha - 1.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.2 [4, 6] *Если для матричных коэффициентов разностной схемы (49) - (50) выполнены следующие условия положительности*

$$A^n_1(x) > 0,\ B^n_j(x) \geq 0,\ j = 1, \ldots, 4,\ x \in \omega_h,\ C_1 \geq 0,\ D > 0, \tag{51}$$

то для ее решения имеют место неравенства для всех $x \in \bar{\omega}_h,\ p = 1, \ldots, m$

$$y^{n+1}_p \geq \min \left\{ \min_{x \in \partial\omega_h} \mu(x),\ \min_{x \in \omega_h} \left(D^{-1} F^n(x) \right) \right\}, \tag{52}$$

$$y^{n+1}_p \leq \max \left\{ \max_{x \in \partial\omega_h} \mu(x),\ \max_{x \in \omega_h} \left(D^{-1} F^n(x) \right) \right\}. \tag{53}$$

Следствие 4.1 [4, 6] *Разностная схема (44) - (46) монотонна и для ее решения справедлива двусторонняя оценка*

$$\bar{m}_7 \leq y^{n+1}_p \leq \bar{m}_8, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad p = 1, \ldots, m, \tag{54}$$

где постоянные $\bar{m}_7$ и $\bar{m}_8$ имеют вид

$$\bar{m}_7 = e^{-Tc} \min \left\{ \min_{\substack{x \in \partial\omega_h \\ 0 \leq k \leq N_0 - 1}} \mu^{k+1}(x),\ \min_{x \in \bar{\omega}_h} U_0(x) + T \min_{(x,t) \in \omega_{\tau h}} G(x,t) \right\},$$

$$\bar{m}_8 = \max \left\{ \max_{\substack{x \in \partial\omega_h \\ 0 \leq k \leq N_0 - 1}} \mu^{k+1}(x),\ \max_{x \in \bar{\omega}_h} U_0(x) \right\} + T \max_{(x,t) \in \omega_{\tau h}} G(x,t),$$

$$c = \max_{1 \leq p \leq m} \left(- \sum_{j=1}^{m} c_{pj} \right) \geq 0.$$

Справедлива следующая априорная оценка разностного решения в равномерной сеточной норме.

Теорема 4.3 [4, 6] *Если элементы матрицы $\mathcal{C}$ в задаче* (39) *удовлетворяют условию* (42), *то для решения разностной схемы* (44) - (46) *справедлива следующая априорная оценка*

$$\left\|Y^{n+1}\right\|_{\bar{\omega}_h} \leq \max\left\{\max_{0\leq k\leq N_0-1}\left\|\mu^{k+1}\right\|_{\partial\omega_h},\ \|U_0\|_{\bar{\omega}_h}\right\} + T\max_{0\leq k\leq N_0-1}\left\|G^{k+1}\right\|_{\omega_h}, \quad (55)$$

где

$$\|Y\|_{\bar{\omega}_h} = \max_{1\leq k\leq m}\max_{P\in\bar{\omega}_h}|y_k(P)|, \quad \|Y\|_{\partial\omega_h} = \max_{1\leq k\leq m}\max_{P\in\partial\omega_h}|y_k(P)|.$$

Аналогичным образом строятся монотонные разностные схемы для модели Шнэкенберга.

Заключение

Основные научные результаты диссертации. Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию монотонных разностных схем, аппроксимирующих следующие начально-краевые задачи для одномерного и двумерного параболичекских уравнений со смешанными граничными условиями Дирихле-Неймана, линейной и нелинейной одномерной модели Био, двумерной квазилинейной параболической системы уравнений с нелинейностями неограниченного роста и модели Шнэкенберга.

В ходе выполнения диссертационной работы получены следующие результаты:

1. для одномерного и двумерного параболичекских уравнений со смешанными граничными условиями Дирихле-Неймана построены монотонные разностные схемы с использованием полуцелых узлов при аппроксимации граничных условий второго рода, получены двусторонние оценки разностных решений, которые зависят только от входных данных, доказана скорость сходимости разностного решения к точному решению второго порядка по пространственной переменной в сеточных аналогах норм C, L_2, W_2^1 [1–3], [7–10];

2. для линейной и нелинейной одномерной модели Био аналогичным методом построены монотонные разностные схемы и получены численные решения без нефизических осцилляций [1,2], [7–10];

3. для двумерной квазилинейной параболической системы уравнений с нелинейностями неограниченного роста построены монотонные разностные схемы второго порядка аппроксимации по пространственным переменным и получены двусторонние оценки разностных решений [4–6], [11].

Рекомендации по практическому использованию результатов.

Полученные результаты могут быть использованы при построении и исследовании разностных схем для различных типов параболических задач.

Построенные алгоритмы могут быть использованы при численном моделировании задач пороупругости.

Список публикаций соискателя

Статьи

1. Матус, П.П. Монотонные разностные схемы для линейного параболического уравнения с граничными условиями смешанного типа / П. П. Матус, В. Т. К. Туен, Ф. Ж. Гаспар // Доклады НАН Беларуси. — 2014 г. — Т. 58, № 5. — С. 18–22.

2. Gaspar, F. J. Numerical methods for a one-dimensional non-linear Biot's model / F. J. Gaspar, F. J. Lisbona, P. Matus, V. T. K. Tuyen // Journal of Computational and Applied Mathematics. – February 2016. – Vol. 293. – P. 67–72.

3. Gaspar, F. J. Monotone finite difference schemes for quasilinear parabolic problems with mixed boundary conditions / F. J. Gaspar, F. J. Lisbona, P. Matus, V. T. K. Tuyen // Comput. Methods Appl. Math.. – April 2016. – Vol. 16, issue 2. – P. 231–244.

4. Гаспар, Ф.Ж. Монотонные разностные схемы для систем эллиптических и параболических уравнений / Ф. Ж. Гаспар, П. П. Матус, В. Т. К. Туен, Л. М. Хиеу // Доклады НАН Беларуси. — 2016 г. — Т. 60, № 5. — С. 29–33.

5. Туен, В.Т.К.Монотонные разностные схемы для модели Шнэкенберг / В. Т. К. Туен // Известия НАН Беларуси. — 2016 г. — Т. 60, № 4. — С. 38–46.

6. Matus, P. Monotone difference schemes for weakly coupled elliptic and parabolic systems / P. Matus, J. F. Gaspar, L. M. Hieu, V. T. K. Tuyen // Comput. Methods Appl. Math.. – 2017. – Vol. 17, issue 2. – P. 287–299.

Материалы конференций

7. Туен, В.Т.К. Монотонные разностные схемы для нелинейного параболического уравнения с граничными условиями смешанного типа / В.Т.К. Туен// Сборник материалов Международной научно-практической конференции

«Вычислительные методы, модели и образовательные технологии», Брест.гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. О.В. Матысика. — Брест, 22—23 октября 2015 г. — С. 28–29.

8. Туен, В.Т.К. Монотонные разностные схемы для одномерной нелинейной модели Био / В.Т.К. Туен// Тезисы докладов Международной конференции «XII Белорусская математическая конференция». — Минск, 5–10 сентября 2016 г. — С. 21.

9. Туен, В.Т.К. Монотонные разностные схемы для двумерного параболического уравнения с граничными условиями смешанного типа / В.Т.К. Туен// Сборник материалов Международной научно-практической конференции «Вычислительные методы, модели и образовательные технологии», Брест.гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. О.В. Матысика. — Брест, 21 октября 2016 г. — С. 52–53.

10. Туен, В.Т.К. Монотонные разностные схемы для линейного параболического уравнения с граничными условиями смешанного типа / В.Т.К. Туен// Материалы XIII Международной научной конференции молодых ученых «Молодежь в науке – 2016». — Минск, 22–25 ноября 2016 г. — С. 251.

11. Туен, В.Т.К. Векторно-разностная схема для системы двумерных квазилинейных параболических уравнений / В.Т.К. Туен// Сборник материалов VI международной научно-практической конференции «Вычислительные методы, модели и образовательные технологии», Брест.гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. О.В. Матысика. — Брест, 19 октября 2017 г. — С. 41–42.

РЕЗЮМЕ

Во Тхи Ким Туен

Разностные схемы для квазилинейных параболических уравнений со смешанными граничными условиями

Ключевые слова: квазилинейные параболические уравнения, смешанные граничные условия Дирихле-Неймана, система двумерных квазилинейных параболических уравнений, монотонная разностная схема, двусторание оценки, априорные оценки, сходимость.

Целью работы является построение и исследование монотонных разностных схем для квазилинейного параболического уравнения со смешанными граничными условиями Дирихле-Неймана и системы двумерных квазилинейных параболических уравнений.

В диссертации получены следующие научные результаты.

1. для одномерного и двумерного параболичекских уравнений со смешанными граничными условиями Дирихле-Неймана построены монотонные разностные схемы с использованием полуцелых узлов при аппроксимации граничных условий второго рода, получены двусторонние оценки разностных решений, которые зависят только от входных данных, доказана скорость сходимости разностного решения к точному решению второго порядка по пространственной переменной в сеточных аналогах норм C, L_2, W_2^1 [1–3], [7–9];

2. для линейной и нелинейной одномерной модели Био аналогичным методом построены монотонные разностные схемы и получены численные решения без нефизических осцилляций [1,2], [7–10];

3. для двумерной квазилинейной параболической системы уравнений с нелинейностями неограниченного роста построены монотонные разностные схемы второго порядка аппроксимации по пространственным переменным и получены двусторонние оценки разностных решений [4–6], [11].

Результаты исследований могут использоваться в построении разностных схем для различных типов параболических задач и в численном моделировании задач пороупругости.

Подписано в печать 2 апреля 2018.
Формат 60x84 $^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 1,28. Уч.-изд. л. 1,16.
Тираж 60 экз. Заказ № 2.

Отпечатано на ризографе Института математики НАН Беларуси.
Издатель и полиграфическое исполнение:
Институт математики НАН Беларуси.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/257 от 2 апреля 2014г.
220072, г. Минск, ул. Сурганова, 11.