Учреждение образования
«Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

УДК 517.925.42

КУЗЬМИЧ
Андрей Викторович

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ ПЛАНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОДНОЙ И ТРЕМЯ ТОЧКАМИ ПОКОЯ

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности
«01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление»

Гродно, 2017

Работа выполнена в учреждении образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»

Научный руководитель:	**Гринь Александр Александрович,** доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математического анализа, дифференциальных уравнений и алгебры учреждения образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»
Официальные оппоненты:	**Амелькин Владимир Васильевич,** доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа Белорусского государственного университета
	Малышева Ольга Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики учреждения образования «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»
Оппонирующая организация:	учреждение образования **«Могилевский государственный университет имени А.А. Кулешова»**

Защита диссертации состоится 09.02.2018 в 10.00 на заседании совета по защите диссертаций К 02.14.02 при учреждении образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» по адресу: 230023, г. Гродно, ул. Ожешко 22, ауд. 209.

Телефон ученого секретаря: (+375 152) 74 43 76, (+375 152) 73 19 26.
Email: v.a.pronko@gmail.com; manami@mail.ru.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ГрГУ им. Я. Купалы.
Автореферат разослан 08.01.2018.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций К 02.14.02 В.А. Пронько

ВВЕДЕНИЕ

Основной задачей качественной теории дифференциальных уравнений является изучение топологической структуры разбиения на траектории всего фазового пространства системы дифференциальных уравнений. В XIX веке А. Пуанкаре впервые сформулировал основные понятия и методы качественного исследования автономных систем дифференциальных уравнений. Он ввел понятие предельного цикла и доказал существование не более конечного числа предельных циклов в полиномиальном векторном поле на плоскости без седловых точек. В работах А. Пуанкаре, А.А. Андронова, Е.А. Леонтович, И.И. Гордона и А.Г. Майера была выявлена фундаментальная роль «особых» траекторий автономной двумерной системы – точек покоя, предельных циклов и сепаратрис седел, число и расположение которых определяют топологическую структуру разбиения фазовой плоскости на траектории в целом. В многочисленных математических моделях, представленных в виде дифференциальных уравнений и систем, устойчивые предельные циклы автономных систем соответствуют автоколебательным режимам в моделируемых процессах. Причем амплитуда автоколебаний (размер предельного цикла) не зависит от начальных условий, а полностью определяется внутренними свойствами системы и ее параметрами. Актуальность изучения предельных циклов автономных дифференциальных систем обусловлена широким применением автоколебаний в различных областях науки и техники.

К настоящему времени в качественной теории дифференциальных уравнений получено большое количество важных результатов, в том числе касающихся и предельных циклов, которые изложены в специальной математической литературе. Если для изучения сепаратрис седел и точек покоя (без учета проблемы различения центра и фокуса) имеется много достаточно надежных методов, то регулярных методов исследования предельных циклов, позволяющих находить их число и расположение, а также определять их кратность и характер устойчивости, до сих пор нет.

Поэтому до настоящего времени не решена до конца не только вторая часть 16-ой проблемы Гильберта, которая заключается в оценке числа и определении взаимного расположения предельных циклов полиномиального векторного поля на плоскости в зависимости от степени полиномов n, но даже ее ослабленные версии: проблема Гильберта – Арнольда, инфинитезимальная проблема, проблема оценки числа предельных циклов полиномиальной системы Льенара и уравнения Абеля.

Для получения полной качественной картины нужно определить: множество всех бифуркационных значений параметров; характер бифуркаций для этих значений; качественную структуру динамической системы при небифуркационных значениях параметров, что существующие методы позволяют сделать только для отдельных классов систем. Даже в простейших случаях, связанных с оценкой числа предельных циклов, рождающихся из точки покоя типа негрубого фокуса или от петли сепаратрисы, теория бифуркаций дает ответ исходя из условий их устойчивости и характера поворота векторного поля системы при изменении параметра. А в тех случаях, когда наблюдаются сложные нелокальные бифуркации, требующие сведения о глобальном поведении траекторий, исчерпывающий ответ, справедливый для всей фазовой плоскости при всех возможных значениях параметров, удается получить достаточно редко. Так, в случае рождения полуустойчивых предельных циклов из сгущения траекторий количество предельных циклов обычно удается оценить только с точностью до их четного числа, а в случае рождения предельных циклов из овалов центра их число обычно оценивается только при значениях параметра, достаточно близких к бифуркационному.

Поэтому проблема оценки числа и локализации предельных циклов остается центральной в качественной теории двумерных систем и включена известным математиком С. Смейлом в перечень 18 важнейших математических задач, которые предстоит разрешать в XXI веке.

В связи с этим, основным предметом исследования диссертации являются предельные циклы гладких автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих одну или три точки покоя на фазовой плоскости. Исследование предельных циклов проводится с помощью классических методов качественной теории и теории бифуркаций, но основное внимание уделяется применению признака Дюлака – Черкаса и его уточнению в двусвязных и трехсвязных областях указанных систем. Для достижения поставленной цели разрабатывались новые способы построения функций Дюлака – Черкаса, способы выделения классов автономных систем с заданной оценкой числа предельных циклов, выяснялся вопрос о характере устойчивости предельных циклов. Работа нацелена на установление точного числа и расположения предельных циклов, окружающих одну или три точки покоя конкретных классов обобщенной системы Ван дер Поля, кубических систем, систем Льенара, систем с возмущенным линейным центром.

Диссертационное исследование является развитием результатов изучения предельных циклов автономных систем второго порядка, полученных в работах Л.А. Черкаса, К.Р. Шнайдера и А.А. Гриня.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами (проектами), темами

Тема диссертационной работы соответствует направлению «Физические и математические методы и их применение для решения актуальных проблем естествознания, техники, новых технологий, экономики и социальных наук», включенному в Перечень приоритетных направлений научных исследований Республики Беларусь на 2011–2015 годы, утвержденный Постановлением Совета Министров Республики Беларусь от 19.04.2010 № 585. Диссертация выполнялась в учреждении образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы» в рамках научно-исследовательских работ «Аналитические и качественные характеристики нелинейных дифференциальных уравнений и динамических систем, моделирующих практические задачи математической физики и других областей естествознания» государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция» (2011–2015 гг., № ГР 20121142), а также проекта Белорусского республиканского Фонда фундаментальных исследований «Особые траектории автономных дифференциальных систем второго и третьего порядка как моделей реальных процессов» (2017–2019 гг., № ГР 20171127).

Цель и задачи исследования

Целью работы является разработка новых подходов и приемов определения точного числа и расположения предельных циклов, окружающих одну или три точки покоя на фазовой плоскости автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части которых являются непрерывно дифференцируемыми вещественными функциями по фазовым переменным и входящим в них параметрам. Особое внимание уделяется применению и развитию метода вспомогательных функций Дюлака – Черкаса.

Для достижения поставленной цели в диссертации решались следующие задачи:

1) построить функции Дюлака – Черкаса для обобщенной системы Ван дер Поля и систем с возмущенным линейным центром на всей фазовой плоскости, а также кубической системы, систем Льенара и Куклеса в областях локализации предельных циклов;

2) получить точное число предельных циклов систем Льенара и Куклеса, обобщенной системы Ван дер Поля и систем с возмущенным линейным центром с одной и тремя точками покоя в конечной части фазовой плоскости;

3) выделить классы систем с возмущенным линейным центром, имеющих заданную оценку числа предельных циклов;

4) определить характер устойчивости предельных циклов.

Научная новизна

В диссертационной работе получены следующие *новые результаты*:

1. Построены функции Дюлака – Черкаса, позволившие доказать единственность предельного цикла во всей фазовой плоскости обобщенной системы Ван дер Поля и систем с возмущенным линейным центром, а также единственность предельного цикла в окрестности негрубого фокуса кубической системы.

2. Выделены классы автономных систем с возмущенным линейным центром, имеющие не более одного предельного цикла на всей фазовой плоскости.

3. Разработаны способы для построения замкнутой трансверсальной кривой, позволяющей установить существование предельного цикла в двусвязной области, в которой только внутренняя граница является овалом, соответствующим функции Дюлака – Черкаса. С помощью предложенных способов установлено точное число и расположение предельных циклов для кубической системы, систем с возмущенным линейным центром и обобщенной системы Ван дер Поля.

4. Для систем с тремя точками покоя получено уточнение признака Дюлака – Черкаса в двусвязной и трехсвязной областях, границы которых образованы овалами, соответствующими функции Дюлака – Черкаса. С помощью полученного уточнения признака Дюлака – Черкаса установлено точное число и расположение предельных циклов для систем Льенара и Куклеса с тремя точками покоя.

Положения, выносимые на защиту

1. Функции Дюлака – Черкаса специальных видов, позволившие доказать единственность предельного цикла у кубических систем, обобщенной системы Ван дер Поля и систем с возмущенным линейным центром, а также выделить системы с возмущенным линейным центром, имеющие не более одного предельного цикла во всей фазовой плоскости.

2. Способы построения замкнутой трансверсальной кривой, позволившие установить точное число и расположение предельных циклов, окружающих одну точку покоя кубической системы, систем с возмущенным линейным центром и обобщенной системы Ван дер Поля.

3. Уточнение признака Дюлака – Черкаса для систем с тремя точками покоя, полученное в двусвязной и трехсвязной областях с границами в виде овалов, соответствующих функции Дюлака – Черкаса, которое позволило установить точное число и расположение предельных циклов у систем Льенара и Куклеса.

Личный вклад соискателя ученой степени

Основные результаты, изложенные в диссертации, получены автором самостоятельно. Научная идея исследования и задачи были сформулированы научным руководителем. Из статьи [4] в диссертацию включен только пример, демонстрирующий эффективность разработанного соискателем метода.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Результаты диссертации были представлены и докладывались на следующих конференциях: XVI международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения – 2014» (Новополоцк, 20–22 мая 2014 г.); 8-ом международном научном семинаре «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений» (Минск, 14–19 сентября 2015 г.); Международной математической конференции «Шестые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям» (Минск, 7–10 декабря 2015 г.); XIX республиканской научной конференции студентов и аспирантов «Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях» (Гомель, 21–23 марта 2016 г.); Международном молодежном научном форуме «Ломоносов» (Москва, 11–15 апреля 2016 г.); Международной научной конференции «XII Белорусская математическая конференция» (Минск, 5–10 сентября 2016 г.); XVII международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения – 2017» (Минск, 16–20 мая 2017 г.) и семинаре кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа Белорусского государственного университета (Минск, 2016 г., 2017 г.).

Опубликование результатов диссертации

По теме диссертации соискателем опубликовано 15 работ: из них 8 – статьи в научных журналах, соответствующих п. 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (4,2 авт. л.), 3 – материалы конференций (0,4 авт. л.) и 4 – тезисы докладов (0,4 авт. л.). Без соавторов опубликованы 4 работы, из них 1 статья в рецензируемом журнале.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения, библиографического списка. Полный объем диссертации составляет 102 страницы. Библиографический список насчитывает 136 наименований, из которых 15 публикаций соискателя, и занимает 11 страниц.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

В **первой главе** приводится аналитический обзор литературы по теме диссертации и обосновывается актуальность исследования, вводятся основные понятия и кратко описываются основные методы и результаты исследования.

Вторая глава посвящена дальнейшему развитию обобщенного подхода Л.А. Черкаса к методу Дюлака, на основе которого построены функции Дюлака – Черкаса для кубической системы в окрестности негрубого фокуса и обобщенной системы Ван дер Поля, позволяющие эффективно получать нелокальную оценку числа предельных циклов для систем

$$\dot{x} = P\left(x, y\right), \quad \dot{y} = Q\left(x, y\right), \quad X = (P, Q), \tag{1}$$

при условии $P, Q \in C^1(\Omega)$, где $\Omega \subseteq R^2$.

Определение 1. [1] *Функция $B(x,\ y) \in C^1(G)$ такая, что $div(BX)$ не изменяет знак в некоторой связной области $G \subset \Omega$ и не равняется нулю в какой-либо подобласти G, называется функцией Дюлака для системы* (1) *в области G.*

Теорема 1. [1] *Пусть $G \subset \Omega$ является p-связной областью. Если в G существует функция Дюлака, которая знакопостоянна в G, то система (1) может иметь не более $p-1$ предельных циклов в G.*

Заметим, что теорема 1 не дает метода ни для построения функции $B(x,\ y)$, ни для локализации предельных циклов, содержащихся в подобласти $G \subset \Omega$. Поэтому успех как в определении G в области Ω, так и в выборе функции $B(x,\ y)$, удовлетворяющей всем требованиям признака Дюлака и соответствующей системе (1), зависит в каждом конкретном случае от вида самой системы и опыта исследователя. Из-за отсутствия регулярного метода построения в качестве функции Дюлака, как правило, выбирались мономы $x^a y^b,\ a, b \in Q$, показательные и рациональные функции простейшего вида. А в силу трудностей в установлении двусвязной подобласти G локализации возможного предельного цикла функция Дюлака в абсолютном большинстве случаев строилась в односвязных областях для доказательства отсутствия предельного цикла.

Обобщение признака Дюлака, предложенное Л.А. Черкасом, основывается на следующем определении.[2, 3]

Определение 2. *Функцию $\Psi \in C^1(\Omega)$ будем называть функцией Дюлака – Черкаса системы* (1) *в области Ω, если существует действительное число*

---

[1]Dumortier, F. Qualitative theory of planar differential systems / F. Dumortier, J. Llibre, J. C. Artes // Universitext. – N. Y. : Springer, 2006. – 298 p.

[2]Черкас, Л. А. Функция Дюлака полиномиальных автономных систем на плоскости / Л. А. Черкас // Дифференциальные уравнения. – 1997. – Т. 33, № 5. – С. 689–699.

[3]Grin, A. A. On some classes of limit cycles of planar dynamical systems / A. A. Grin, K. Schneider // Dynamics of continuous, discrete and impulsive systems. Ser. A, Mathematical Analysis. – 2007. – Vol. 14, № 5. – P. 641–656.

$k \neq 0$ такое, что выполняется неравенство

$$\Phi = k\Psi \operatorname{div} X + \frac{\partial \Psi}{\partial x} P + \frac{\partial \Psi}{\partial y} Q > 0 \ (< 0) \quad \forall (x, y) \in \Omega. \tag{2}$$

Если Ψ является функцией Дюлака – Черкаса системы (1) в области Ω, то из определения 2 вытекают ее следующие свойства: 1) $B = |\Psi|^{1/k}$ представляет собой функцию Дюлака в каждой подобласти Ω, где $\Psi > 0$ или $\Psi < 0$; 2) любая траектория системы (1), которая встречает кривую $W = \{(x, y) \in \Omega : \ \Psi(x, y) = 0\}$, пересекает W трансверсально; 3) кривая W отделяет подобласти, где Ψ положительна, от подобластей, где Ψ отрицательна; 4) любой предельный цикл системы (1), целиком расположенный в области Ω, не пересекает кривую W.

Замечание 1. [2] *Характер устойчивости предельного цикла Γ определяется знаком выражения $k\Psi\Phi|_\Gamma$. Если выражение $k\Psi\Phi|_\Gamma$ отрицательно (положительно), то Γ является орбитально устойчивым (неустойчивым) предельным циклом.*

Заметим, что знак числа k из определения функции Дюлака – Черкаса является существенным.

Теорема 2. [2] *Пусть Ψ является функцией Дюлака – Черкаса системы* (1) *в односвязной области Ω при положительном k. Тогда система* (1) *не имеет предельных циклов в области Ω.*

Доказательство теоремы 2 не работает при $k < 0$. Следующий результат включает случай $k < 0$.

Теорема 3. [2] *Пусть Ψ является функцией Дюлака – Черкаса для системы (1) в связной области $\Omega \subset R^2$. Тогда в каждой p-связной подобласти $\tilde{\Omega}$ из Ω с границей $\partial\tilde{\Omega} \subset W \cup \partial\Omega$ число предельных циклов не превосходит $p - 1$.*

Замечание 2. *Существенное преимущество предложенного подхода по сравнению с классическим состоит в том, что не нужно заранее устанавливать месторасположение (локализацию) предельных циклов. Такая локализация получается автоматически из топологического анализа кривой W.*

В частности, оценку числа и локализацию предельных циклов позволяет получить следующая теорема.

Теорема 4. [4] *Пусть структурно устойчивая система (1) в односвязной области Ω имеет единственную точку покоя – антиседло O, $\operatorname{div} X(O) \neq 0$, и функцию Ψ, удовлетворяющую условию (2). Тогда, если кривая W состоит из s вложенных друг в друга овалов, то при $k < 0$ в каждой из $s - 1$ двусвязных подобластей Ω_i, ограниченных соседними овалами кривой W, система (1) имеет точно один предельный цикл, а в целом она может иметь в области Ω не более*

[4]Черкас, Л. А. Конструктивные методы исследования предельных циклов автономных систем второго порядка (численно-алгебраический подход) / Л. А. Черкас, А. А. Гринь, В. И. Булгаков. – Гродно : ГрГУ, 2013. – 489 с.

s предельных циклов.

В разделе 2.1 рассматривается кубическая система

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y + \alpha x + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3, \\ \frac{dy}{dt} &= -x + \alpha y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3, \end{aligned} \tag{3}$$

с фиксированными вещественными коэффициентами a_{ij}, b_{ij} и параметром α, имеющая негрубый фокус $O(0,\ 0)$, первая фокусная величина Ляпунова v_3 которого при $\alpha = 0$ отлична от нуля. Здесь проводится построение функции Дюлака – Черкаса в окрестности негрубого фокуса системы (3). Способ построения основан на следующей теореме.

Теорема 5. [4] *Для системы* (3) *существует функция Ψ в виде полинома $\Psi = e_1 + e_2x + e_3y + e_4x^2 + ... + e_{15}y^4$ с коэффициентами $e_i \in R$, $i = \overline{1, 15}$, а также числа $k < 0$, $\delta_0 > 0$, $\alpha_0 > 0$ такие, что при всех (x, y) из окрестности $U_\delta = \{(x,\ y) : |x| \leqslant \delta_0,\ |y| \leqslant \delta_0\}$ и при всех α из окрестности $V_\varepsilon = \{\alpha : 0 < \alpha \leqslant \alpha_0\}$ для полинома Φ вида $\Phi = r\alpha^2 + s(x^2 + y^2)^2 + \tilde{\Phi}(x,\ y)$, где $\tilde{\Phi}$ содержит члены более высоких порядков, $r > 0$, а множитель s зависит только от коэффициентов a_{ij}, b_{ij} и числа k, выполняется неравенство $\Phi(x, y, k, \alpha) > 0$.*

Если при этом уравнение $\Psi = 0$ определяет один овал, то в рассматриваемой окрестности фокуса, кроме, быть может, малоамплитудного предельного цикла, других предельных циклов система (3) не имеет.

Выбор значения α_0 производится так, чтобы при нем система (3) являлась структурно устойчивой.

В разделе 2.2 рассматривается обобщенная система Ван дер Поля вида

$$\frac{dx}{dt} = y^{p-1},\ \frac{dy}{dt} = -x^{2q-1} + \mu y^{p+1}(1 - x^{2q})f(x), \tag{4}$$

зависящая от действительного параметра $\mu \in I \subseteq R$, $0 \in I$, где $p = 2l$, $q, l \in N$, $f(x) \in C^1(R)$. В данном разделе излагается способ построения функции Дюлака – Черкаса в виде полинома $\Psi(x,\ y,\ \mu) = \Psi_0(x,\ \mu) + \Psi_1(x,\ \mu)y + \Psi_p(x,\ \mu)y^p$. В частности доказана следующая теорема.

Теорема 6 [3]. *Обобщенная система Ван Дер Поля* (4) *имеет функцию Дюлака – Черкаса в виде $\Psi(x,\ y,\ \mu) = \frac{pc_1}{2q}\left(x^{2q} - 1\right) + c_1y^p$ для всех $(x,\ y) \in R^2$ и $\mu \in I \backslash \{0\}$, если функция $c_1 f(x)$ не изменяет знак, а натуральное число p является четным. Причем уравнение $\Psi(x,\ y,\ \mu) = 0$ определяет единственный овал, который окружает начало координат.*

Следствие 1. *Для всех значений $\mu \in R \backslash \{0\}$ система* (4) *имеет не более одного предельного цикла во всей фазовой плоскости. Причем, если предельный цикл существует, то он окружает овал $\Psi(x,\ y,\ \mu) = 0$ и является устойчивым* *(неустойчивым), если выполняется условие* $\mu f(x) < 0$ $(\mu f(x) > 0)$.

С помощью метода Пуанкаре–Понтрягина показано существование единственного предельного цикла у системы (4) при некоторых конкретных видах функции $f(x)$.

Третья глава посвящена разработке способов выделения классов автономных систем с возмущенным линейным центром, имеющих не более одного предельного цикла во всей фазовой плоскости при всех действительных значениях параметра возмущения. В разделе 3.1 разработан способ построения функции Дюлака – Черкаса для обобщенной системы Куклеса

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = y + \mu\left(m_0(x,\,\mu) + m_1(x,\,\mu)y\right) \equiv P(x,\,y),\ \frac{dy}{dt} = -x + \mu\left(h_0(x,\,\mu) + \right.\\ &\quad\left. + h_1(x,\,\mu)y + h_2(x,\,\mu)y^2 + h_3(x,\,\mu)y^3\right) \equiv Q(x,\,y), \end{aligned} \tag{5}$$

где функции $m_i : R \times I \to R$, $i = 0,\,1$, $h_j : R \times I \to R$, $j = 0,\ldots,\,3$, непрерывны по двум переменным и непрерывно дифференцируемы по переменной x.

На основе построения функции Дюлака – Черкаса $\Psi(x,\,y,\,\mu)$ предложен способ выделения классов системы Куклеса (5), имеющих во всей фазовой плоскости не более одного предельного цикла для всех действительных значений параметра. В частности, если

$$\Psi(x,\,y,\,\mu) = ax^2 + ay^2 - c,\ a,\,c \in R_+, \tag{6}$$

то имеет место следующая теорема.

Теорема 7 [2]. *Пусть* $h_3 : R \times R \to R$ *– непрерывная функция, а* $m_1 : R \times R \to R$ *– непрерывно дифференцируемая функция по переменной* x. *Если функция* $h_3(x,\,\mu)$ *не изменяет знак для всех* $\mu \in R\backslash\{0\}$, $x \in R$ *и не обращается в нуль тождественно на каком-нибудь промежутке* $I_x \subset R$, *то система*

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = y + \mu\left(l(ax^2 - c) + m_1(x,\,\mu)y\right)\\ &\frac{dy}{dt} = -x + \mu\left(\frac{1}{a}(ax^2 - c)m_1'(x,\,\mu) - xm_1(x,\,\mu) + \right.\\ &\quad\left. + \left(\frac{3}{2a}(ax^2 - c)h_3(x,\,\mu) + alx\right)y + m_1'(x,\,\mu)y^2 + h_3(x,\,\mu)y^3\right) \end{aligned} \tag{7}$$

имеет функцию Дюлака – Черкаса в виде (6) *для всех* $(x,\ y) \in R^2$ *и* $\mu \neq 0$. *Таким образом, для всех значений* $\mu \in R$ *система* (7) *имеет не более одного предельного цикла во всей фазовой плоскости. Если предельный цикл существует, то он устойчив (неустойчив) при* $\mu h_3(x,\,\mu) < 0$ $(\mu h_3(x,\,\mu) > 0)$.

Раздел 3.2 посвящен разработке способа построения функции Дюлака –

Черкаса для автономной системы с возмущенным линейным центром вида

$$\frac{dx}{dt} = y \equiv P(x,\, y),\, \frac{dy}{dt} = -x + \mu \sum_{j=0}^{n} h_j(x,\, \mu) y^j \equiv Q(x,\, y,\, \mu), \tag{8}$$

где функции $h_j(x,\ \mu) \,:\, R \times R \to R,\ j = 0,...,\ n,$ непрерывны по двум переменным и непрерывно дифференцируемы по первой переменной.

В частности, при построении функции Дюлака – Черкаса в виде

$$\Psi\left(x,\, y,\, \mu\right) = \Psi_0\left(x,\, \mu\right) + \Psi_1\left(x,\, \mu\right) y + \Psi_2\left(x,\, \mu\right) y^2 \tag{9}$$

доказана следующая теорема.

Теорема 8 [8]. *Для системы* (8) *многочлен* $\Phi(x,\, y,\, \mu)$, *заданный формулой* (2)*, при любых числах* $n \in N$, $\mu \neq 0$ *и при произвольной функции* Ψ *вида* (9)*, где* $\Psi_2(x,\, \mu) \neq 0$, *всегда можно привести к виду* $\Phi(x,\, y,\, \mu) = \Phi_0(x,\, \mu)$.

В данном разделе предложен способ выделения классов системы (8) с возмущенным линейным центром, имеющей во всей фазовой плоскости не более одного предельного цикла для всех действительных значений параметра. В частности, для функции $\Psi(x,\, y,\, \mu)$ вида (6) и $n = 7, n = 9$ получены следующие теоремы.

Теорема 9 [8]. *Система*

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dt} = y,\, \frac{dy}{dt} = -x + \mu h_7(x,\, \mu)\left(\frac{35}{16a^3}(ax^2-c)^3 y + \frac{35}{8a^2}(ax^2-c)^2 y^3 + \right.\\ \left. + \frac{7}{2a}(ax^2-c) y^5 + y^7\right)\end{gathered} \tag{10}$$

при выполнении условия (6) *и знакопостоянстве функции* $h_7(x,\ \mu)$ *для всех действительных значений параметра* μ *имеет не более одного предельного цикла во всей фазовой плоскости. Если предельный цикл существует, то он является устойчивым (неустойчивым) при* $\mu h_7(x,\, \mu) < 0$ $(\mu h_7(x,\, \mu) < 0)$.

Теорема 10 [8]. *Система*

$$\begin{gathered}\frac{dx}{dt} = y,\, \frac{dy}{dt} = -x + \mu\left(\frac{315(ax^2-c)^5}{128a^4} y + \frac{105(ax^2-c)^4}{16a^3} y^3 + \right.\\ \left. + \frac{63(ax^2-c)^3}{8a^2} y^5 + \frac{9(ax^2-c)^2}{2a} y^7 + (ax^2-c) y^9\right)\end{gathered} \tag{11}$$

при всех действительных значениях параметра μ *имеет не более одного предельного цикла во всей фазовой плоскости. Если предельный цикл существует, то он является устойчивым (неустойчивым) при* $\mu < 0$ $(\mu > 0)$.

С помощью метода Пуанкаре – Понтрягина показано существование единственного предельного цикла у системы (10) при $h_7(x) \equiv 1$.

Четвертая глава посвящена точной оценке числа предельных циклов автономных систем на плоскости с одной и тремя точками покоя в конечной части фазовой плоскости. В разделе 4.1 представлены способы для установления точного числа предельных циклов, окружающих одну точку покоя системы (1). Эти способы основаны на построении дополнительного овала, окружающего все овалы, задаваемые функцией Дюлака – Черкаса $\Psi(x,\, y)$. Суть первого подхода изложена в следующей теореме.

Теорема 11 [6]**.** *Пусть выполняются условия теоремы 4 и дополнительно для системы (1) в области Ω существует функция Дюлака – Черкаса $\tilde{\Psi}(x,\, y)$ при $\tilde{k} < 0$ такая, что кривая $\tilde{W}$ состоит из $s+1$ овала в Ω, окружающих точку O. Тогда система (1) в области Ω имеет точно s предельных циклов.*

Второй подход основан на построении функции Дюлака в виде

$$B = |\Psi(x,\, y)|^{\frac{1}{k}} |\tilde{\Psi}(x,\, y)|^{\frac{1}{\tilde{k}}},\ \ k,\, \tilde{k} \in R,\ \ k\tilde{k} \neq 0,\ \ \Psi,\, \tilde{\Psi} \in C^1(\Omega). \tag{12}$$

При этом справедлива следующая теорема.

Теорема 12. [4] *Функция B вида (12) является функцией Дюлака системы (1) в области Ω, если выполняется условие*

$$\tilde{\Phi} \equiv k\tilde{k}\Psi\tilde{\Psi}\,\mathrm{div}\, X + k\Psi\frac{d\tilde{\Psi}}{dt} + \tilde{k}\tilde{\Psi}\frac{d\Psi}{dt} > 0 (< 0). \tag{13}$$

Пусть $W_0 = W \cup \tilde{W}$, где $W = \{(x,\ y) \in \Omega : \Psi(x,\ y) = 0\}$, $\tilde{W} = \{(x,\, y) \in \Omega : \tilde{\Psi}(x,\, y) = 0\}$, тогда в Ω: 1) кривая W_0 не содержит точек покоя системы (1); 2) любая траектория системы (1) при встрече с кривой W_0 пересекает ее трансверсально; 3) ветви кривой W_0 не пересекаются друг с другом; 4) предельные циклы системы (1), целиком расположенные в области Ω, не пересекают кривую W_0.

Для оценки числа и локализации циклов системы (1) применима следующая теорема.

Теорема 13. [4] *Пусть в односвязной области Ω система (1) имеет единственную точку покоя O, являющуюся антиседлом, и функцию B вида (12), удовлетворяющую условию (13) при $k < 0, \tilde{k} < 0$. Тогда, если кривые W и $\tilde{W}$ состоят в Ω из соответственно s и $\tilde{s}$ вложенных друг в друга овалов, окружающих O, то в каждой из $s + \tilde{s} - 1$ кольцеобразных подобластей Ω_i, ограниченных соседними овалами ω_i и ω_{i+1} кривой W_0, система (1) имеет точно один предельный цикл, который является устойчивым (неустойчивым) при $\tilde{\Phi}/(k\tilde{k}\Psi\tilde{\Psi}) < 0 (> 0)$. В целом система (1) может иметь в области Ω не более $s + \tilde{s}$ предельных циклов.*

Суть второго подхода выражает следующая теорема.

Теорема 14 [6]**.** *Пусть выполняются условия теоремы 4 и дополнительно для системы (1) в области Ω существует функция Дюлака B вида (12), удовлетворяющая условию теоремы 13, и при этом множество $\tilde{W}$ состоит из единственного овала, расположенного в двусвязной подобласти Ω_s и* *окружающего все овалы множества W. Тогда система (1) имеет точно s предельных циклов в области Ω.*

Если при использовании теоремы 14 не удается построить функцию $\tilde{\Psi}$, удовлетворяющую неравенству (12), то можно отказаться от знакоопределенности функции $\tilde{\Phi}$, а использовать условие трансверсальности кривой $V = \{(x,\ y) \in \Omega : \tilde{\Phi} = 0\}$ векторному полю X системы (1), что составляет суть третьего подхода.

Теорема 15 [6]**.** *Пусть выполняются условия теоремы 4 и существует функция $\tilde{\Psi}(x,\ y) \in C^1(\Omega)$ при $\tilde{k} < 0$, такая, что в области Ω кривая $\tilde{W}$ не пересекается ни с кривой V, ни с кривой W. Тогда кривая $\tilde{W}$ трансверсальна векторному полю X и не пересекается предельными циклами системы (1), целиком расположенными в области Ω.*

Теорема 16 [6]**.** *Пусть выполняются условия теоремы 4 и у системы (1) существует замкнутая трансверсальная кривая, которая расположена в двусвязной подобласти Ω_s и окружает внешний овал кривой W, образуя вместе с ним границу кольцеобразной области $\tilde{\Omega}_s \subset \Omega_s$. Если траектории системы (1) при возрастании t входят через границу $\partial\tilde{\Omega}_s$ извне во внутрь подобласти $\tilde{\Omega}_s$ (или наоборот), то в подобласти $\tilde{\Omega}_s$ имеется единственный устойчивый (неустойчивый) предельный цикл системы (1), а всего система (1) имеет точно s предельных циклов в области Ω.*

В разделе 4.2 приведены уточнения признака Дюлака – Черкаса для трехсвязной и двусвязных областей, полученных при разбиении односвязной области Ω овалами кривой W, и способы установления точного числа предельных циклов автономных систем (1) с тремя точками покоя в конечной части фазовой плоскости с суммарным индексом Пуанкаре +1. Отметим, что в общем случае признак Дюлака – Черкаса в трехсвязной области допускает семь различных вариантов числа и взаимного расположения предельных циклов.

В подразделе 4.2.2 приведено уточнение признака Дюлака – Черкаса для трехсвязной области, когда все ее границы являются овалами кривой W.

Теорема 17 [5]**.** *Пусть в односвязной области Ω система* (1) *имеет три точки покоя: два антиседла A и B и одно седло O, а функция Ψ представляет собой функцию Дюлака – Черкаса системы* (1) *при $k < 0$. Если в области Ω кривая W состоит из:*

– $s_1 \neq 0$ вложенных друг в друга овалов ω_i, окружающих антиседло A,

– $s_2 \neq 0$ вложенных друг в друга овалов ν_j, окружающих антиседло B,

– $s_0 \neq 0$ вложенных друг в друга овалов u_l, окружающих всю группу точек, то

1) в каждой из $s_1 - 1$ кольцеобразных подобластей Ω_{Ai}, ограниченных соседними овалами ω_i и ω_{i+1}, в каждой из $s_2 - 1$ кольцеобразных подобластей Ω_{Bj}, ограниченных соседними овалами ν_j и ν_{j+1}, а также в каждой из $s_0 - 1$

кольцеобразных подобластей Ω_l, *ограниченных соседними овалами* u_l *и* u_{l+1}, *система* (1) *имеет точно один предельный цикл;*

2) в трехсвязной подобласти Ω_{00}, *ограниченной внешними овалами* ω_{s_1}, ν_{s_2} *и внутренним овалом* u_1, *у системы* (1) *может быть одна замкнутая траектория, окружающая все три точки покоя* A, B, O, *или две замкнутых траектории, имеющих одинаковый характер устойчивости, по одной вокруг каждого антиседла A и B.*

В целом система (1) *может иметь в области* Ω *не более* $s = s_1 + s_2 + s_0$ *предельных циклов.*

В подразделе 4.2.3 предложен способ для точной оценки числа предельных циклов автономных систем с тремя точками покоя с помощью построения второй функции Дюлака – Черкаса $\tilde{\Psi}(x,\, y)$.

Теорема 18 [5]**.** *Пусть выполняются условия теоремы 17 и дополнительно для системы* (1) *в области* Ω *существует функция Дюлака – Черкаса* $\tilde{\Psi}(x,\, y)$ *при* $\tilde{k} < 0$ *такая, что кривая* $\tilde{W}$ *состоит из* $s_0 + 1$ *овала* $\tilde{u}_l$ *в* Ω*, причем внешний овал* $\tilde{u}_{s_0+1}$ *окружает внешний овал* u_{s_0} *кривой* W*. Тогда система* (1) *в области* Ω *имеет точно* s_0 *предельных циклов, окружающих все три точки покоя* A, B, O.

В подразделе 4.2.4 приведено уточнение признака Дюлака – Черкаса для трехсвязной области в случае, когда все ее внутренние границы являются овалами кривой W, а внешняя граница совпадает с границей $\partial\Omega$ рассматриваемой односвязной области Ω.

Теорема 19 [7]**.** *Пусть в односвязной области* Ω *система* (1) *имеет три точки покоя: два антиседла A и B и одно седло O, а функция* Ψ *представляет собой функцию Дюлака – Черкаса системы* (1) *при* $k < 0$. *Если в области* Ω *кривая* W *состоит из:*

– $s_1 \neq 0$ *вложенных друг в друга овалов* ω_i*, окружающих антиседло A,*

– $s_2 \neq 0$ *вложенных друг в друга овалов* ν_j, *окружающих антиседло B,*

то

1) в каждой из $s_1 - 1$ *кольцеобразных подобластей* Ω_{Ai}, *ограниченных соседними овалами* ω_i *и* ω_{i+1}, *в каждой из* $s_2 - 1$ *кольцеобразных подобластей* Ω_{Bj}, *ограниченных соседними овалами* ν_j *и* ν_{j+1}, *система* (1) *имеет точно один предельный цикл;*

2) в трехсвязной подобласти Ω_{00}, *ограниченной внешними овалами* ω_{s_1}, ν_{s_2} *и границей* $\partial\Omega$ *области* Ω *для системы* (1) *может иметь место один из следующих случаев:*

– нет замкнутых траекторий,

– есть одна замкнутая траектория, окружающая только одну точку покоя A *или* B,

– есть одна замкнутая траектория, окружающая все три точки покоя A, B, O,

– есть две замкнутые траектории, имеющие одинаковый характер устойчивости, по одной вокруг каждого антиседла A *и* B.

В целом система (1) *может иметь в области* Ω *не менее* $s_1 + s_2 - 2$ *предельных циклов, но не более* $s = s_1 + s_2$ *предельных циклов.*

В подразделе 4.2.5 предложены способы для установления точного числа предельных циклов автономных систем с тремя точками покоя с помощью построения второй функции Дюлака – Черкаса или ее модификации.

Теорема 20 [7]**.** *Пусть выполняются условия теоремы 19 и дополнительно для системы* (1) *в области* Ω *существует вторая функция Дюлака – Черкаса* $\tilde{\Psi}(x, y)$ *при* $\tilde{k} < 0$ *такая, что кривая* $\tilde{W} = \{(x, y) \in \Omega : \tilde{\Psi}(x, y) = 0\}$ *состоит в* Ω *из* $s_1 + 1$ $(s_2 + 1)$ *овала, окружающих только точку покоя* A (B). *Тогда система* (1) *в области* Ω *имеет точно* s_1 (s_2) *предельных циклов, окружающих только одну точку покоя* A (B).

Следствие 2. *Пусть выполняются условия теоремы 19 и дополнительно для системы* (1) *в области* Ω *существует вторая функция Дюлака – Черкаса* $\tilde{\Psi}(x,\ y)$ *при* $\tilde{k}\ <\ 0$ *такая, что кривая* $\tilde{W}$ *состоит в* Ω *из* $s_1 + 1$ *овала, окружающих только одну точку покоя* A, *и из* $s_2 + 1$ *овала, окружающих только одну точку покоя* B. *Тогда система* (1) *в области* Ω *имеет точно* s_1 *предельных циклов, окружающих только одну точку покоя* A, *и* s_2 *предельных циклов, окружающих только одну точку покоя* B.

Теорема 21 [7]**.** *Пусть выполняются условия теоремы 19 и дополнительно для системы* (1) *в области* Ω *существует вторая функция Дюлака – Черкаса* $\tilde{\Psi}(x, y)$ *при* $\tilde{k} < 0$ *такая, что кривая* $\tilde{W}$ *состоит в* Ω *из* s_1 *овалов, окружающих только одну точку покоя* A, *и* s_2 *овалов, окружающих только одну точку покоя* B, *а также одного овала, окружающего все три точки* A, O, B. *Тогда для системы* (1) *в подобласти* Ω_{00} *возможен один из следующих случаев:*

1) есть одна замкнутая траектория, окружающая все три точки покоя A, B, O,

2) есть две замкнутые траектории, имеющие одинаковый характер устойчивости, по одной вокруг каждого антиседла A и B, причем движение изображающей точки на двух замкнутых траекториях при $t \to +\infty$ *может проходить как в одном направлении, так и в противоположных направлениях, система* (1) *в целом имеет точно* $s_1{+}s_2$ *или* $s_1{+}s_2 - 1$ *предельных циклов.*

В подразделе 4.2.7 предложены уточнения признака Дюлака – Черкаса для двусвязной области, внутренняя граница которой окружает одну точку покоя, а ее внешняя граница окружает три точки покоя.

Замечание 3. *Если в теореме 19 нет овалов* ω_i, *окружающих точку A (или нет овалов* v_j, *окружающих точку B), то вместо трехсвязной подобласти* Ω_{00} *будет двусвязная подобласть* $\Omega_{s_2}(\Omega_{s_1})$, *в которой система* (1) *либо не имеет предельных циклов, либо имеет точно один предельный цикл, окружающий* *только точку B (или только точку A).*

Замечание 4. *Если в условии теоремы 19 нет овалов* ω_i, *окружающих точку A (или нет овалов* v_j, *окружающих точку B), то вместо трехсвязной подобласти* Ω_{00} *будет двусвязная подобласть* Ω_{s_2} (Ω_{s_1}). *Пусть для системы* (1) *в области* Ω *существует вторая функция Дюлака – Черкаса* $\tilde{\Psi}(x,\ y)$ *при* $\tilde{k} < 0$ *такая, что кривая* $\tilde{W}$ *имеет* s_2 (s_1) *овалов, из которых* $s_2 - 1$ $(s_1 - 1)$ *окружает только точку* B (A), *а внешний овал* $\tilde{\omega}_{s_2}$ $(\tilde{\omega}_{s_1})$ *окружает или только одну указанную точку или все три точки* A, O, B. *Тогда в подобласти* Ω_{s_2} (Ω_{s_1}) *существует один предельный цикл, окружающий только точку B (или только точку A), и система* (1) *будет иметь точно* s_2 (s_1) *вложенных предельных циклов.*

Эффективность разработанных подходов показана на примерах обобщенной системы Ван дер Поля и систем с возмущенным линейным центром.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. Построены функции Дюлака – Черкаса специальных видов, позволившие доказать единственность предельного цикла у кубических систем, обобщенной системы Ван дер Поля и систем с возмущенным линейным центром, а также выделить системы с возмущенным линейным центром, имеющие не более одного предельного цикла во всей фазовой плоскости [1; 2; 3; 8; 9; 10; 12; 13].

2. Разработаны способы построения замкнутой трансверсальной кривой, позволившие установить точное число и расположение предельных циклов, окружающих одну точку покоя кубической системы, систем с возмущенным линейным центром и обобщенной системы Ван дер Поля [4; 6; 11; 14].

3. Уточнен признак Дюлака – Черкаса для систем с тремя точками покоя в двусвязной и трехсвязной областях с границами в виде овалов, соответствующих функции Дюлака – Черкаса, который позволил установить точное число и расположение предельных циклов у систем Льенара и Куклеса [5; 7; 15].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты, полученные в диссертации, носят теоретический характер. Проведенные исследования позволили разработать и обосновать новые эффективные способы применения метода Дюлака – Черкаса для решения проблемы оценки числа и локализации предельных циклов, окружающих одну или три точки покоя, кубических систем, обобщенной системы Ван дер Поля, систем Льенара и систем с возмущенным линейным центром. Предложенные результаты могут быть использованы для других классов динамических систем, описывающих реальные процессы в различных областях науки и техники.

Практическая ценность диссертации заключается в возможности получения точных глобальных характеристик и свойств предельных циклов, соответствующих автоколебательным режимам в моделируемых процессах. Полученные результаты могут найти применение при конструировании математических моделей реальных процессов с заданными автоколебательными режимами. Результаты диссертации могут быть использованы при чтении спецкурсов по качественной теории и теории бифуркаций автономных систем второго порядка, а также по теории нелинейных колебаний.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи

1. Гринь, А. А. Функция Дюлака – Черкаса в окрестности негрубого фокуса кубической автономной системы на плоскости / А. А. Гринь, А. В. Кузьмич // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2014. – № 2 (173). – С. 36–43.

2. Кузьмич, А. В. Выделение класса обобщенных систем Куклеса с единственным предельным циклом / А. В. Кузьмич // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2015. – № 3 (199). – С. 18–26.

3. Кузьмич, А. В. Об единственности предельного цикла для обобщенной системы Ван дер Поля / А. В. Кузьмич, А. А. Гринь // Вестник БГУ. Сер.1, Физика. Математика. Информатика. – 2016. – № 2. – С. 84–90.

4. Кузьмич, А. В. Функция Дюлака – Черкаса для одной возмущенной гамильтоновой системы на плоскости / А. В. Кузьмич, Я. Чэнь, А. А. Гринь // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2016. – Т. 6, № 3. – С. 19–28.

5. Гринь, А. А. Точные оценки числа предельных циклов автономных систем с тремя точками покоя на плоскости / А. А. Гринь, А. В. Кузьмич // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Сер. фізіка-матэматычных навук. – 2016. – № 4. – С. 7–17.

6. Гринь, А. А. Признак Дюлака – Черкаса для точной оценки числа предельных циклов автономных систем на плоскости / А. А. Гринь, А. В. Кузьмич // Дифференциальные уравнения. – 2017. – Т. 53, № 2.– С. 174–182.

7. Кузьмич, А. В. О точном числе предельных циклов некоторых автономных систем с тремя точками покоя на плоскости / А. В. Кузьмич, А. А. Гринь // Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Сер. 2, Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне. – 2017. – Т. 7, № 2. – С. 30–40.

8. Кузьмич, А. В. Выделение систем с возмущенным линейным центром, имеющих не более одного предельного цикла / А. В. Кузьмич, А. А. Гринь // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Сер. фізіка-матэматычных навук. – 2017. – № 3. – С. 40–48.

Материалы конференций

9. Кузьмич, А. В. Признак Дюлака для обобщенной системы Ван дер Поля / А. В. Кузьмич, А. А. Гринь // Шестые Богдановские чтения по

обыкновенным дифференциальным уравнениям : материалы Междунар. матем. конф., Минск, 7–10 дек. 2015 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ. – Минск, 2015. – Ч. 1. – С. 72–74.

10. Кузьмич, А. В. Выделение класса возмущенных гамильтоновых систем, имеющих не более одного предельного цикла / А. В. Кузьмич // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях : материалы XIX респ. науч. конф. студентов и аспирантов, Гомель, 21–23 марта 2016 г. : в 2 ч. / ГГУ им. Ф. Скорины ; редкол.: О. М. Демиденко (гл. ред.) [и др.]. – Гомель, 2016. – Ч. 1. – С. 18–19.

11. Кузьмич, А. В. Точная оценка числа предельных циклов автономных систем на плоскости [Электронный ресурс] / А. В. Кузьмич // Ломоносов – 2016 : материалы докл. Междунар. молодежного науч. форума, Москва, 11–15 апр. 2016 г. / МГУ имени М. В. Ломоносова. – М., 2016. – С. 1–2. – 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM).

Тезисы докладов

12. Гринь, А. А. Функция Дюлака – Черкаса в окрестности негрубого фокуса кубической автономной системы на плоскости / А. А. Гринь, А. В. Кузьмич // Еругинские чтения – 2014 : тез. докл. XVI междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Новополоцк, 20–22 мая 2014 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ, Полоцкий гос. ун-т. – Минск, 2014. – Ч. 1. – С. 57–58.

13. Кузьмич, А. В. Обобщенная система Куклеса с единственным предельным циклом / А. В. Кузьмич // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (АМАДЕ–2015) : тез. докл. 8-го междунар. науч. семинара, Минск, 14–19 сент. 2015 г. / Ин-т математики НАН Беларуси. – Минск, 2015. – С. 51.

14. Кузьмич, А. В. Точная оценка числа предельных циклов, окружающих одну точку покоя автономных систем на плоскости / А. В. Кузьмич, А. А. Гринь // XII Белорусская математическая конференция : тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 5–10 сент. 2016 г. : в 5 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси ; ред. С. Г. Красовский. – Минск, 2016. – Ч. 2. – С. 33–34.

15. Кузьмич, А. В. О предельных циклах автономных систем второго порядка с тремя точками покоя / А. В. Кузьмич, А. А. Гринь // Еругинские чтения – 2017 : тез. докл. XVII междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям, Минск, 16–20 мая 2017 г. : в 2 ч. / Ин-т математики НАН Беларуси, БГУ, БНТУ. – Минск, 2017. – Ч. 1. – С. 50–51.

РЭЗЮМЭ

Кузьміч Андрэй Віктаравіч

Лімітавыя цыклы планарных дынамічных сістэм з адным і трыма пунктамі спакою

Ключавыя словы: аўтаномная сістэма другога парадку, лімітавы цыкл, біфуркацыя, 16-я праблема Д. Гільберта, метад Дзюлака, функцыя Дзюлака – Чэркаса, палінаміяльная сістэма, сістэма з узрушаным лінейным цэнтрам, абагульненная сістэма Ван дэр Поля, пункт спакою.

Мэта даследавання: распрацоўка новых падыходаў і прыёмаў вызначэння дакладнай колькасці і размяшчэння лімітавых цыклаў, якія акружаюць адзін ці тры пункта спакою на фазавай плоскасці аўтаномных сістэм звычайных дыферэнцыяльных ураўненняў, правыя часткі якіх з’яўляюцца бесперапынна дыферэнцыруемымі рэчавымі функцыямі па фазавых зменных і параметрах, якія ў іх уваходзяць.

Метады даследавання: выкарыстоўваюцца метад функцый Дзюлака – Чэркаса і метад Пуанкарэ – Пантрагіна.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. У дысертацыі атрыманы наступныя новыя навукова абгрунтаваныя вынікі:

1. Пабудаваны функцыі Дзюлака – Чэркаса спецыяльных відаў, якія дазволілі даказаць адзінасць лімітавага цыклу ў кубічных сістэм, абагульненай сістэмы Ван дэр Поля і сістэм з узрушаным лінейным цэнтрам, а таксама вылучыць сістэмы з узрушаным лінейным цэнтрам, якія маюць не больш за адзін лімітавы цыкл ва ўсёй фазавай плоскасці.

2. Распрацаваны спосабы пабудовы замкнёнай трансверсальнай крывой, якія дазволілі ўсталяваць дакладную колькасць і размяшчэнне лімітавых цыклаў, якія акружаюць адзін пункт спакою кубічнай сістэмы, сістэм з узрушаным лінейным цэнтрам і абагульненай сістэмы Ван дэр Поля.

3. Для сістэм з трыма пунктамі спакою атрымана ўдакладненне прыкметы Дзюлака – Чэркаса ў двузвязнай і трохзвязнай абласцях з межамі ў выглядзе авалаў, якія адпавядаюць функцыі Дзюлака – Чэркаса, якое дазволіла ўсталяваць дакладную колькасць і размяшчэнне лімітавых цыклаў у сістэм Льенара і Кукляса.

Рэкамендацыі па выкарыстанні і галіна ужывання. Дысертацыя мае тэарэтычны характар. Атрыманыя вынікі могуць быць скарыстаны для атрымання дакладных глабальных ацэнак лімітавых цыклаў аўтаномных сістэм на плоскасці.

РЕЗЮМЕ

Кузьмич Андрей Викторович

Предельные циклы планарных динамических систем с одной и тремя точками покоя

Ключевые слова: автономная система второго порядка, предельный цикл, бифуркация, 16-я проблема Д. Гильберта, признак Дюлака, функция Дюлака – Черкаса, полиномиальная система, система с возмущенным линейным центром, обобщенная система Ван дер Поля, точка покоя.

Цель исследования: разработка новых подходов и приемов определения точного числа и расположения предельных циклов, окружающих одну или три точки покоя на фазовой плоскости автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части которых являются непрерывно дифференцируемыми вещественными функциями по фазовым переменным и входящим в них параметрам.

Методы исследования: используются метод функций Дюлака – Черкаса и метод Пуанкаре – Понтрягина.

Полученные результаты и их новизна. В диссертации получены следующие новые научно обоснованные результаты:

1. Построены функции Дюлака – Черкаса специальных видов, позволившие доказать единственность предельного цикла у кубических систем, обобщенной системы Ван дер Поля и систем с возмущенным линейным центром, а также выделить системы с возмущенным линейным центром, имеющие не более одного предельного цикла во всей фазовой плоскости.

2. Разработаны способы построения замкнутой трансверсальной кривой, позволившие установить точное число и расположение предельных циклов, окружающих одну точку покоя кубической системы, систем с возмущенным линейным центром и обобщенной системы Ван дер Поля.

3. Для систем с тремя точками покоя получено уточнение признака Дюлака – Черкаса в двусвязной и трехсвязной областях с границами в виде овалов, соответствующих функции Дюлака – Черкаса, которое позволило установить точное число и расположение предельных циклов у систем Льенара и Куклеса.

Рекомендации по использованию и область применения. Диссертация имеет теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для получения точных глобальных оценок числа предельных циклов автономных систем на плоскости.

SUMMARY
Andrei Kuzmich
Limit cycles of planar dynamic systems with one and three equilibrium points

Keywords: autonomous system of the second order, limit cycle, bifurcation, 16-th D. Hilbert problem, Dulac method, Dulac – Cherkas function, polynomial system, system with a perturbed linear center, generalized Van der Pol system, equilibrium point.

The purpose of research: to develop new approaches and tools for the determining the exact number and localization of limit cycles surrounding one or three equilibrium points on the phase plane for autonomous systems of ordinary differential equations whose right-hand sides are continuously differentiable real functions of the phase variables and parameters.

Methods of research: there are used method of Dulac – Cherkas function and Poincaré – Pontriagin method.

The received results and their novelty. This thesis contains the following new scientifically proved results:

1. Dulac – Cherkas functions of special type are consructed. It allows to prove the uniqueness of the limit cycle for cubic systems, the generalized Van der Pol system and systems with a perturbed linear center and construct systems with a perturbed linear center having at most one limit cycle in the entire phase plane.

2. Methods for constructing a closed transversal curve are worked out. It provides a way to establish the exact number and localization of limit cycles, surrounding one equilibrium point, for a cubic system, systems with a perturbed linear center and the generalized Van der Pol system.

3. For systems with three equilibrium points the Dulac – Cherkas method for a doubly-connected and triply-connected domains, where the boundaries of which are formed by the ovals, which correspond to the Dulac – Cherkas function, is clarified. It allows to establish the exact number and localization of limit cycles for the Liénard and Kukles systems.

Recommendations for use and application. The thesis has theoretical character. The received results can be used for obtaining exact global number of limit cycles of autonomous systems on the plane.