ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ»

УДК 511.35, 511.48, 511.75

Луневич
Артём Вадимович

Размерность Хаусдорфа в совместных диофантовых приближениях зависимых величин

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Минск, 2017

Работа выполнена в государственном научном учреждении «Институт математики Национальной академии наук Беларуси»

Научный руководитель:	**Берник Василий Иванович**, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник отдела теории чисел государственного научного учреждения “Институт математики Национальной академии наук Беларуси”.
Официальные оппоненты:	**Нестеренко Юрий Валентинович**, доктор физико-математических наук, член-корреспондент Российской академии наук. **Кротов Вениамин Григорьевич**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории функций Белорусского государственного университета.
Оппонирующая организация:	Гродненский государственный университет.

Защита состоится 8 сентября 2017 г. в 16.00 на заседании совета по защите диссертаций Д 01.02.01 при государственном научном учреждении ”Институт математики Национальной академии наук Беларуси” по адресу: 220072, Республика Беларусь, г. Минск, ул. Сурганова, 11, конференц-зал.
Тел. ученого секретаря: (017) 284–19–61, email: kalosha@im.bas-net.by.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики Национальной академии наук Беларуси.

Автореферат разослан 10.07.2017 г.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций,
кандидат физ.-мат. наук Калоша Н.И.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваемые в данной работе задачи связаны с мерой Лебега, Хаара и размерностью Хаусдорфа множества точек, приближаемых алгебраическими точками с заданным порядком. Такие задачи часто возникают в теории диофантовых приближений. Один из методов решения этих задач заключается в доказательстве регулярности множества приближающих точек, и затем, используя свойства регулярных систем чисел и векторов, удается получить требуемый результат. Особый интерес представляет случай, когда мера Лебега (Хаара) рассматриваемого множества равна нулю. Тогда структуру полученного множества можно изучать с помощью понятия размерности Хаусдорфа, которое применимо только к множествам, мера которых равна нулю.

Метрические задачи в теории диофантовых приближений

Метрическая теория диофантовых приближений берет свое начало в работах А. Я. Хинчина и Э. Бореля. Основой многих задач в данной тематике является теорема о приближении действительных чисел рациональными числами, которая была доказана А. Я. Хинчиным в 1924 году и носит его имя. Пусть $\Psi(H) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — монотонно убывающая функция и $J \subset \mathbb{R}$ — некоторый интервал. Обозначим как $\mathcal{L}_1(\Psi)$ множество тех $x \in J$, для которых существует бесконечно много решений $p, q \in \mathbb{Z}$ неравенства

$$|qx - p| < \Psi(q).$$

В соответствии с теоремой Хинчина,

$$\mu_1(\mathcal{L}_1(\Psi)) = \begin{cases} 0, & \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) < \infty, \\ \mu_1(J), & \sum_{H=1}^{\infty} \Psi(H) = \infty. \end{cases}$$

Пусть

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_j \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant j \leqslant n,$$

$$\deg P = n,$$

$$H = H(P) = \max_{0 \leqslant j \leqslant n} \{|a_j|\}.$$

По аналогии с теоремой Хинчина обозначим как $\mathcal{L}_n(\Psi)$ множество тех $x \in I$, для которых существует бесконечно много решений неравенства

$$|P(x)| \ll H(P)^{-n+1}\Psi(H(P)) \qquad (1)$$

в полиномах $P \in \mathcal{P}_n$ ($\mathcal{P}_n$ — множество полиномов степени n с целыми коэффициентами). Теорема Хинчина имеет много аналогов и обобщений. В. И. Берником рассмотрены случаи расходимости ряда, а В. В. Бересневичем — случаи сходимости. Важным частным случаем теоремы Хинчина является ситуация, когда $\Psi(H) = H^{n-1-w}$, где w — некоторое фиксированное число. Неравенство (1) примет вид

$$|P(x)| \ll H(P)^{-w} \qquad (2)$$

(в этом частном случае вместо $\mathcal{L}_n(\Psi)$ будем писать $\mathcal{L}_n(w)$). С помощью принципа ящиков Дирихле нетрудно доказать, что если $w \leqslant n$, то неравенство (2) имеет бесконечно много решений в полиномах $P \in \mathcal{P}_n$ для почти всех x из некоторого интервала I. В 1932 году К. Малер[1] предположил, что если $w > n$, то мера множества $\mathcal{L}_n(w)$ равна 0. Его предположение доказал В. Г. Спринджук[2]. Бейкер[3] несколько улучшил результат Спринджука и предположил, что теорема Хинчина справедлива для $L_n(\varPsi)$ в случае сходимости ряда. В случае сходимости его гипотеза была доказана в работе Берника[4], а в случае расходимости — Бересневичем[5]. Вскоре эти результаты были распространены на поля комплексных и p-адических чисел[6,7,8].

Размерность Хаусдорфа

Так как в случае $w > n$ мера множества оказалась равна нулю, имело смысл изучить его структуру с помощью понятия размерности Хаусдорфа. Если размерность Хаусдорфа принимает целое значение, то она совпадает с размерностью этого множества, поэтому размерность Хаусдорфа будем обозначать — dim. Равенство $\dim \mathcal{L}_1(w) = \frac{2}{w}$ при $w > 2$ независимо друг от друга доказали Ярник[9] и Безикович[10]. Позже Бейкер и Шмидт[11] получили точное значение размерности Хаусдорфа множества действительных чисел, приближаемых алгебраическими действительными числами. Затем было доказано[12], что значение размерности Хаусдорфа множества $\mathcal{L}_n(w)$ при $w > n$ равно $\frac{n+1}{w+1}$. Кроме того, было найдено точное значение размерности Хаусдорфа множества точек евклидова пространства, приближаемых точками с рациональными координатами[13], и

[1]Mahler, K. Über das Mass der Menge aller S-Zahlen / K. Mahler // Math. Ann. — 1932. — Vol. 3, No. 106. — P. 131–139.

[2]Спринджук, В. Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Спринджук. — Минск : «Наука и Техника», 1967.

[3]Baker, A. On a theorem of Sprindzuk / A. Baker // Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, Math. Phys. Sci. — 1966. — Vol. 48, No. 292. — P. 92–104.

[4]Bernik, V. On the exact order of approximation of zero by values of integral polynomials / V. Bernik // Acta Arithm. — 1989. — Vol. 53. — P. 17–28.

[5]Beresnevich, V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V. Beresnevich // Acta Arithm. — 1999. — Vol. 90. — P. 97–112.

[6]Берник, В. И. Теорема Хинчиновского типа для целочисленных полиномов от комплексной переменной / В. И. Берник, Д. В. Васильев // Труды Института математики НАНБ. — 1999. — Т. 3. — С. 10—20.

[7]Ковалевская, Э. И. Метрическая теорема о точности порядка приближения нуля целочисленными полиномами в $\mathbb{Q}_p$ / Э. И. Ковалевская // Докл. НАНБ. — 1999. — Т. 42. — С. 34—36.

[8]Beresnevich, V. On approximation of p-adic numbers by p-adic algebraic numbers / V. Beresnevich, V. I. Bernik, E. I. Kovalevskaya // Journal of Number Theory. — 2005. — Vol. 111, No. 1. — P. 33–56.

[9]Jarnik, V. Diophantische Approximationen und Hausdorffsches Mass / V. Jarnik // Mat. Sb. — Moscow, 1929. — Vol. 36. — P. 371–382.

[10]Besicovich, A. S. Sets of fractional dimension (IV): On rational approximations to real numbers / A. S. Besicovich // J. London Math. Soc. — London, 1934. — Vol. 9. — P. 126–131.

[11]Baker, A. Diophantine approximation and Hausdorff dimension / A. Baker, W. M. Shmidt // Proc. London Math. Soc. — 1970. — No. 21. — P. 1–11.

[12]Берник, В. И. Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений / В. И. Берник // Acta Arithm. — 1983. — Т. 42, № 3. — С. 219—253.

[13]Rynne, P. Hausdorff dimension and generalized simultaneous diophantine approximation / P. Rynne // Bulletin of the London Mathematical Society. — 1998. — Vol. 30, No. 04. — P. 365–376.

получена[1] оценка снизу размерности Хаусдорфа в случае приближения нулями невырожденных функций. Нахождение точной размерности Хаусдорфа — задача достаточно трудоемкая и для ее решения обычно находят оценки размерности сверху и снизу, после чего эти оценки стараются улучшить до тех пор, пока они не совпадут. В теории диофантовых приближений оценку сверху размерности Хаусдорфа некоторого множества часто удается получить с помощью непосредственных вычислений, а оценка снизу обычно следует из свойств регулярной системы, если таковую удается построить. Как было сказано выше, равенство $\dim \mathcal{L}_n(w) = \frac{n+1}{w+1}$ было доказано Берником в 1983 году[2]. Однако стоит отметить, что точное равенство было получено далеко не сразу. В 1970 году Бейкер и Шмидт[3] доказали неравенство

$$\frac{n+1}{w+1} \leqslant \dim \mathcal{L}_n(w) < 2\frac{n+1}{w+1}, \tag{3}$$

причем основную трудность представляла именно оценка снизу, которая заняла основную часть работы. Оценка сверху была получена с помощью неравенств Вирзинга[4]. Логично было предположить[1] , что при $w > n$

$$\dim \mathcal{L}_n(w) = \frac{n+1}{w+1}. \tag{4}$$

Из указанных выше результатов видно, что эта гипотеза верна при $n = 1$. При $n = 2$ Каш и Фолькман[5] доказали неравенство $\dim \mathcal{L}_2(w) \leqslant \frac{3}{w+1}$, что вместе с неравенством (3) дает верность равенства (4) для $n = 2$. Р. Бейкер[6] доказал, что $\dim \mathcal{L}_3(w) \leqslant \frac{4}{w+1}$ при $w > 3$ и $\dim \mathcal{L}_n(w) < \frac{n+1}{w+1}$ при $n \geqslant 4$ и $w > \frac{(n^2+n-3)}{3}$, что вместе с (3) дает верность гипотезы для $n = 3$ и при $w > \frac{(n^2+n-3)}{3}$ для $n \geqslant 4$. Кроме того, Р. Бейкер получил оценку

$$\dim \mathcal{L}_n(w) \leqslant \frac{n}{w+1-\frac{n}{3}}$$

при $\frac{4n-3}{3} \leqslant w \leqslant \frac{n^2+n-3}{3}$. Однако при $n < w < \frac{4n-3}{3}$ предложенный Р. Бейкером метод не позволял получить оценку лучше тривиальной $\dim \mathcal{L}_n(w) \leqslant 1$. Неравенство $\dim \mathcal{L}_n(w) \leqslant 1$ может быть получено с помощью метода существенных и несуществен-

[1]Dickinson, H. Extremal manifolds and Hausdorff dimension / H. Dickinson, M. Dodson // Duke Math. — 2000. — Vol. 101, No. 2. — P. 271–281.

[2]Берник, В. И. Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений / В. И. Берник // Acta Arithm. — 1983. — T. 42, № 3. — C. 219—253.

[3]Baker, A. Diophantine approximation and Hausdorff dimension / A. Baker, W. M. Shmidt // Proc. London Math. Soc. — 1970. — No. 21. — P. 1–11.

[4]Wirsing, E. Approximation mit algebraischen Zahlen beschrankten Grades / E. Wirsing // Für die reine und angewandte Mathematik. — 1961. — Vol. 106. — P. 67–77.

[5]Kash, F. Zur Mahlerschen Vermutung über S-Zahlen / F. Kash, B. Volkmann // Math. Ann. — 1958. — Vol. 136. — P. 442–453.

[6]Baker, R. Sprindzuk's theorem and Hausdorff dimension / R. Baker // Mathematika. — 1976. — Vol. 23. — P. 184–197.

ных областей, который ввел Спринджук[1,2,3,4]. После этого в 1983 году В. И. Берник представил окончательное доказательство[5] равенства (4).

Оценка количества алгебраических точек вблизи нормальной по Малеру кривой

Кроме метрических задач, в теории диофантовых приближений представляют интерес задачи о количестве целых точек внутри фигур и тел в различных пространствах. Такие задачи в евклидовых пространствах берут свое начало в работах Дирихле и Гаусса. Многие подобные задачи или уже решены, или имеют трудно улучшаемые оценки сверху и снизу, например, проблема круга Гаусса и проблема делителей Дирихле. В этих задачах получены оценки сверху и снизу для остаточного члена в асимптотической формуле для искомого числа алгебраических точек, причем верхняя оценка постепенно улучшается и приближается к нижней[6]. За последние годы было получено много оценок количества алгебраических чисел в коротких интервалах[7,8]. Недавно появилась новая работа[9] о количестве рациональных точек внутри областей в $\mathbb{R}^2$.

[1]Спринджук, В. Г. О гипотезе Малера / В. Г. Спринджук // Докл. АН СССР. — 1964. — Т. 154, № 4. — С. 783—786.

[2]Спринджук, В. Г. Еще о гипотезе Малера / В. Г. Спринджук // Докл. АН СССР. — 1964. — Т. 155, № 1. — С. 54—56.

[3]Спринджук, В. Г. Доказательство гипотезы Малера о мере множества S-чисел / В. Г. Спринджук // Изв. АН. СССР, сер. матем. — 1965. — Т. 29, № 2. — С. 379—436.

[4]Baker, A. On a theorem of Sprindzuk / A. Baker // Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, Math. Phys. Sci. — 1966. — Vol. 48, No. 292. — P. 92–104.

[5]Берник, В. И. Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений / В. И. Берник // Acta Arithm. — 1983. — Т. 42, № 3. — С. 219—253.

[6]Карацуба, А. А. Основы аналитической теории чисел / А. А. Карацуба. — 2-е изд., — Москва: «Наука», 1983. — С. 240.

[7]Берник, В. И. Распределение алгебраических чисел и точек с алгебраическими сопряженными координатами в областях малой меры / В. И. Берник, Ф. Гётце, А. Г. Гусакова // Ин-т математики НАН Беларуси, препринт. — 2016. — 1(578).

[8]Гётце, Ф. Алгебраические числа в коротких интервалах / Ф. Гётце, А. Г. Гусакова // Доклады НАН Беларуси. — 2014. — Т. 59, № 4. — С. 11—16.

[9]Beresnevich, V. Metric Diophantine Approximation: aspects of recent work / V. Beresnevich // Cambridge University Press. — 2016.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами и темами

Результаты диссертации были получены в рамках выполнения Государственной программы научных исследований «Конвергенция», задание «Применение диофантовых приближений в различных метриках в теории трансцендентных чисел, диофантовых уравнениях, распределении алгебраических чисел, дискриминантов и результантов» (Конвергенция 2004), НИР «Многоточечные и нелокальные задачи для уравнений с частными производными и связанные с ними распределения резонансных точек гладких функций в областях малой меры» по договору Ф13К-155 с Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований, НИР «Метрические проблемы геометрии чисел и теории диофантовых приближений» Ф14Р-034 от 23 мая 2014 года (совместно с Хабаровским отделением Учреждения РАН Института прикладной математики ДВО РАН, Россия, Хабаровск).

Цель и задачи исследования

Целью диссертации является исследование распределения алгебраических точек в евклидовых и неевклидовых пространствах, доказательства аналогов теоремы Хинчина и нахождение рамерности Хаусдорфа множества точек вблизи алгебраических точек; получение эффективных количественных результатов в этих направлениях.

Основные **задачи** диссертации: доказательство регулярности алгебраических точек на плоскости; нахождение меры множества, состоящего из точек близи алгебраических точек с заданным порядком приближения; нахождение точной размерности Хаусдорфа множества точек вблизи алгебраических точек в неевклидовом пространстве; оценка количества точек вблизи нормальной по Малеру кривой в поле $\mathbb{Q}_p$.

Научная новизна

Все результаты, выносимые на защиту, являются новыми и могут быть применены в дальнейших исследованиях в метрической теории диофантовых приближений.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие основные положения:

- доказана регулярность множества алгебраических точек на плоскости;
- доказан аналог теоремы Хинчина в случае расходимости для пространства $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$;
- найдено точное значение размерности Хаусдорфа множества точек из $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$, приближаемых с заданным порядком алгебраическими точками из этого пространства;
- получена оценка количества алгебраических точек вблизи нормальной по Малеру кривой в пространстве $\mathbb{Q}_p^2$.

Личный вклад соискателя

В совместной работе [1] научным руководителем В. И. Берником была поставлена задача и предложена методика исследования. В совместно опубликованных работах [2, 7] А. В. Луневичу принадлежит идея переноса конструкций регулярной системы точек из пространств меньших размерностей на пространство $\mathbb{R}^3$. В работах [3, 8] А. В. Луневичу принадлежит доказательство аналога теоремы Хинчина в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ в случае расходимости с использованием свойств регулярной системы алгебраических точек в $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$. Работы [4, 5, 9] выполнены без соавторства. В совместной работе [6] вклад авторов равнозначен.

Апробация результатов диссертации

Результаты диссертации докладывались соискателем на международных и отечественных конференциях:

– на международной научной конференции «XII международная конференция “Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения”, посвященная 80-летию профессора Виктора Николаевича Латышева» (Тула, 2014);

– на международной конференции, посвященной 85-летию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения» (Тула, 2015);

– на международной научной конференции «Дискретная математика, алгебра и их приложения» (Минск, 2015);

– на XII Белорусской международной конференции (Минск, 2016);

– на семинарах по теории чисел в Институте математики НАН Беларуси (руководитель — профессор В. И. Берник);

– на семинаре кафедры теории чисел Московского государственного университета во время командировки в Москву (Москва, 2016).

Опубликованность результатов диссертации

Все основные результаты, выносимые на защиту, опубликованы в 9 работах. Из них 5 журнальных статей [1—5] (2 без соавторов) в научных изданиях, включенных в перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований; 4 тезиса выступлений на математических конференциях и семинарах. Общий объем опубликованных материалов – 59 страниц.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из титульного листа, оглавления, перечня условных обозначений, введения, общей характеристики работы, пяти глав, заключения и списка использованных библиографических источников, включающего 69 наименований. Полный объем диссертации составляет 66 страниц, из них 7 страниц занимает библиографический список.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** изложена история метрических задач в теории диофантовых приближений, задач о размерности Хаусдорфа и задач о количестве алгебраических точек внутри различных областей; указаны источники, в которых были опубликованы близкие по тематике исследования результаты. Во всех главах присутствуют краткое введение и предварительные сведения, которые используются для доказательства основного результата каждой главы.

В **первой главе** построена регулярная система алгебраических точек на плоскости.

Определение 1.1 *Счетное множество* Γ*, состоящее из точек* $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2\ )$ *на плоскости вместе с положительной функцией* N*, определенной на* Γ*, называется* (v_1, v_2)*-регулярной системой* (N, Γ)*, если для любого прямоугольника* $\Pi = I_1 \times I_2$ *найдется такое число* $\mathrm{T}_0(\Pi) > 0$*, что при* $\mathrm{T} > \mathrm{T}_0$ *выполнены следующие условия.*

1. Прямоугольники

$$|x - \gamma_1| < \mathrm{T}^{-v_1}, \quad v_1 > 0$$
$$|y - \gamma_2| < \mathrm{T}^{-v_2}, \quad v_2 > 0$$

не пересекаются.

2. $\#\left\{\overline{\gamma} \in \Gamma \bigcap \Pi\ : N(\overline{\gamma}) \le \mathrm{T}^{v_1+v_2}\right\} \ge c_1 \mathrm{T}^{v_1+v_2} \mu\Pi.$

В этой главе доказаны две теоремы.

Теорема 1.1 *Пусть* Γ *— множество, состоящее из точек* $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2\ ) \in \left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)^2$ *с алгебраическими координатами, где* α_1 и α_2 *– корни одного и того же неприводимого многочлена с взаимнопростыми коэффициентами,* $H(\overline{\alpha}) = H(\alpha_1) = H(\alpha_2)$*,* $\deg \overline{\alpha} = \deg \alpha_1 = \deg \alpha_2 \le n$*. Тогда множество* Γ *вместе с функцией* $N(\overline{\alpha}) = (H(\overline{\alpha}))^{n+1}$ *образует* (v_1, v_2)*-регулярную систему, где*

$$v_1 + v_2 = n + 1, \quad v_1 > 0,\ v_2 > 0.$$

Теорема 1.2 *Пусть* Γ *— множество, состоящее из точек* $\overline{\beta} = (\beta_1, \beta_2\ ) \in \left(-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)^2$ *с целыми алгебраическими координатами, где* β_1 и β_2 *— корни одного и того же неприводимого многочлена с взаимнопростыми коэффициентами,* $H\left(\overline{\beta}\right) = H(\beta_1) = H(\beta_2)$*,* $\deg \overline{\beta} = \deg \beta_1 = \deg \beta_2 \le n$*. Тогда множество* Γ *вместе с функцией* $N\left(\overline{\beta}\right) = \left(H\left(\overline{\beta}\right)\right)^n$ *образует* (v_1, v_2)*-регулярную систему, где*

$$v_1 + v_2 = n, \quad v_1 > 0,\ v_2 > 0.$$

Основой доказательства теорем 1.1 и 1.2 является следующая теорема.

Теорема 1.3 *Пусть* $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_n(Q,\ \delta_0,\ I_1,\ I_2)$ *обозначает множество пар* $(x,\ y) \in I_1 \times I_2$*, для которых система неравенств*

$$\begin{cases} |P(x)| \ll Q^{-v}, \\ |P(y)| \ll Q^{-v}, \\ \min\left\{|P'(x)|, |P'(y)|\right\}\ < \delta_0 Q \end{cases} \tag{5}$$

имеет решение в полиномах $P(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$*, где* $2v = n - 1$*. Тогда при достаточно малой величине* $\delta_0 = \delta_0(n)$ *имеем*

$$\mu\mathcal{L}_n < \frac{1}{4}\,|I_1|\,|I_2|\,.$$

Доказательство теоремы 1.3 выполнено с помощью метода математической индукции по n и основано на свойствах существенных и несущественных областей, которые ввел В. Г. Спринджук.

Во **второй главе** получен аналог теоремы Хинчина в случае расходимости в пространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{Q}_p$.

Определим $\mathcal{L}_{\mathbf{v},\boldsymbol{\lambda}}$ как множество точек внутри параллелепипеда $T = I\times K\times D$, где $I\subset\mathbb{R}$ — интервал, $K\subset\mathbb{C}$ — круг, $D\subset\mathbb{Q}_p$ — цилиндр, для которого система неравенств

$$\begin{cases}|P(x)| < H^{-v_1}\,\Psi^{\lambda_1}(H)\\ |P(z)| < H^{-v_2}\,\Psi^{\lambda_2}(H)\\ |P(\omega)|_p < H^{-v_3}\,\Psi^{\lambda_3}(H)\end{cases} \tag{6}$$

имеет бесконечно много решений в полиномах $P\in\mathbb{Z}[x]$, причем выполнены условия

$$v_1 + 2v_2 + v_3 = n-3 \text{ и } \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 1. \tag{7}$$

Следующая теорема была доказана В. И. Берником в соавторстве с Н. В. Будариной и Д. Диккинсон.[1]

Теорема 2.1 *Предположим, что условия* (6) *выполнены. Если* $n \geqslant 3$ *и* $\sum_{r=1}^{\infty}\Psi(r) = \infty$*, то*

$$\mu\mathcal{L}_{\mathbf{v},\boldsymbol{\lambda}} = \mu(T)$$

при $v_1 = v_2 = \frac{n-4}{4}$, $v_3 = \frac{n}{4}$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{4}$. Доказательство основано на свойствах регулярной системы алгебраических точек в $\mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{Q}_p$, которая строится аналогично регулярной системе в главе 1.

Вторая глава посвящена доказательству следующей теоремы.

Теорема 2.2 *Предположим, что условия* (6) *и* (7) *выполнены. Если* $n \geqslant 3$ *и* $\sum_{r=1}^{\infty}\Psi(r) = \infty$*, то*

$$\mu\mathcal{L}_{\mathbf{v},\boldsymbol{\lambda}} = \mu(T).$$

Ясно, что теорема 2.2 является обобщением теоремы 2.1.

В **третьей** главе результат главы 2 доказан для пространства $\mathbb{Q}_p^2$.

В **главе 4** получено точное значение размерности Хаусдорфа множества точек пространства $\mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{Q}_p$, приближаемых алгебраическими точками. В основе доказательства вновь используется построенная в пространстве $\mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{Q}_p$ регулярная система[1].

Определим $\mathcal{L}_{w,n}$ как множество точек параллелепипеда $T = I\times K\times D$, где $I\subset\mathbb{R}$, $K\subset\mathbb{C}$, $D\subset\mathbb{Q}_p$, для которых система неравенств

[1] Bernik, V. A divergent Khitchine's theorem in the real, complex and p-adic fields / V. Bernik, N. Budarina, D. Dickinson // Lithunian Mathematical Journal. — 2008. — Vol. 48, No. 2. — P. 158–173.

$$|x-\alpha| < H^{-w_1-1},\ |z-\beta| < H^{-w_2-1},\ |\omega-\gamma|_p < H^{-w_3}$$

имеет бесконечно много решений в полиномах $P \in \mathbb{Z}[x]$, где α, β, γ — корни полинома P, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{Z}$, $\gamma \in \mathbb{Q}_p$ и

$$w_1 + 2w_2 + w_3 > n - 2,\ w_1, w_2, w_3 > 0. \tag{8}$$

Обозначим $S_{w,n} = \min\left\{\frac{n+2+3w_1-2w_2-w_3}{w_1+1};\ \frac{n+2+w_2-w_3}{w_2+1};\ \frac{n+1}{w_3}\right\}$.

Глава 4 посвящена доказательству следующей теоремы.

Теорема 4.1 *При $n \geqslant 3$ верно равенство:*

$$\dim \mathcal{L}_{w,n} = S_{w,n}, \tag{9}$$

где $w_1 + 1 > w_2 + 1 > w_3$.

Теорема 4.1 следует из двух следующих неравенств, которые были доказаны в 4 главе.

$$\dim \mathcal{L}_{w,n} \leqslant S_{w,n}, \tag{10}$$

$$\dim \mathcal{L}_{w,n} > S_{w,n} - \delta,\ \forall \delta > 0. \tag{11}$$

В **пятой** главе получена оценка сверху количества алгебраических точек внутри полосы малой меры в поле $\mathbb{Q}_p$.

Определение 5.1 *Функция $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ называется нормальной, если она имеет вид*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n,$$

где $a,\ a_n \in \mathbb{Z}_p$ для всех n и

$$\lim_{n\to\infty} |a_n|_p = 0.$$

Данное определение было предложено Малером[1].

Такие функции обладают двумя важными свойствами:

— производные $f^{(k)}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ также являются нормальными функциями;

— нормальная функция над $\mathbb{Z}_p$ раскладывается в ряд Тейлора[2], что неверно для произвольной p-адической функции[3].

Обозначим $A_n^2(Q)$ — множество точек в пространстве $\mathbb{Q}_p^2$, координаты которых — корни одного многочлена с целыми действительными коэффициентами, высота которого не превосходит Q.

---

[1] Mahler, K. p-Adic Numbers and Their Functions. Vol. 76 / K. Mahler. — Cambridge Tracts in Mathematics, 1981. — P. 320.

[2] Adams, W. W. Transcendental numbers in the p-adic domain / W. W. Adams // Amer. J. Math. — 1966. — Vol. 88, No. 2. — P. 279–308.

[3] Mahler, K. Über transzendente P-adische Zahlen / K. Mahler // Compos. Math. — 1935. — Vol. 2. — P. 259–275.

Теорема 5.1 *При* $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$ *для любого цилиндра* $\Pi = I_1 \times I_2 \subset \mathbb{Z}_p^2$ *с центром в точке* $\overline{d}$ *и* $\mu I_i = p^{\left[\log_p Q^{-\lambda_i}\right]}$, $i = 1, 2$ *при* $Q > Q_0(n, \overline{\lambda}, \overline{d})$ *справедлива оценка*

$$\# A_n^2(Q, \Pi) \le c_2 Q^{n+1} \mu \Pi,$$

где $A_n^2\left(Q, \Pi\right) = A_n^2\left(Q\right) \cap \Pi$ и $c_2 = 4 \cdot 2^{2n} \cdot n^2 + 1$.

Для доказательства теоремы 5.1 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 5.1 *Обозначим через* $G = G(\overline{\gamma}, T) \subset \mathbb{Z}^2$ *(где* $\overline{\gamma} = (\gamma_1;\ \gamma_2) \in \mathbb{Z}_p^2$ *— фиксированная точка из* $\mathbb{Z}_p^2$*) множество точек* $\overline{b} = (b_1;\ b_0) \in \mathbb{Z}^2$ *таких, что выполняются следующие неравенства:*

$$\left\{\begin{array}{l} |b_1\gamma_1 + b_0|_p \le T_1; \\ |b_1\gamma_2 + b_0|_p \le T_2; \\ |\gamma_1 - \gamma_2|_p \ge \varepsilon > 0. \end{array}\right. \tag{12}$$

Пусть $|b_1|, |b_0| \le Q$, *где* Q *— достаточно большое натуральное число. Тогда справедлива оценка*

$$\# G \le \max\{2\varepsilon^{-1} Q T_1;\ 1\} \cdot \max\{2 Q T_2;\ 1\}.$$

Пусть $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ — функция p-адической переменной. Зафиксируем некоторое действительное число $\tau \in (0,\ 1)$. Обозначим через $M_f^n\left(Q, \tau\right)$ множество всех алгебраических точек $\overline{\gamma} \in \mathbb{Z}_p^2$, которые удовлетворяют условиям:

1. $H\left(\overline{\gamma}\right) \le Q$;

2. $\deg\left(\overline{\gamma}\right) \le n$;

3. $\left|f\left(\gamma_1\right) - \gamma_2\right|_p \le p^{\left[\log_p Q^{-\tau}\right]}$.

Таким образом,

$$M_f^n\left(Q, \tau\right) = \left\{ \overline{\gamma} \in \mathbb{Z}_p^2 \ :\ \begin{array}{l} \left|f\left(\gamma_1\right) - \gamma_2\right|_p \le p^{\left[\log_p Q^{-\tau}\right]}, \\ H\left(\overline{\gamma}\right) \le Q, \\ \deg\left(\overline{\gamma}\right) \le n, \\ \tau \in (0,\ 1) \end{array} \right\}.$$

Теорема 5.2 *Если функция* $f\left(\omega\right)$ *является нормальной, то имеет место неравенство*

$$\# M_f^n\left(Q, \tau\right) \le c_3 \cdot Q^{n+1-\tau},$$

где c_3 *— константа, зависящая только от* n.

Теорема 5.2 следует из теоремы 5.1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертации

Построена регулярная система на плоскости, состоящая из пар сопряженных действительных алгебраических чисел степени n [1].

Доказана теорема типа Хинчина в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ в случае расходимости для общего вида правых частей неравенств [3, 7].

Найдено точное значение размерности Хаусдорфа множества точек пространства $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$, приближаемых алгебраическими точками с заданным порядком [4, 6].

Получена оценка сверху количества алгебраических точек вблизи нормальной по Малеру кривой в поле $\mathbb{Q}_p$ [5].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Полученные результаты имеют теоретический характер. Построенная на плоскости регулярная система алгебраических точек и аналог теоремы Хинчина в случае расходимости могут быть использованы в качестве основы для обобщения на пространства больших размерностей. Полученное точное значение размерности Хаусдорфа точек из $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$, приближаемых алгебраическими точками, и оценка количества алгебраических точек вблизи нормальной по Малеру кривой в поле $\mathbb{Q}_p$ могут быть использованы для изучения структуры различных множеств нулевой меры в различных пространствах, которые состоят из точек, хорошо приближаемых алгебраическими точками. Результаты диссертации также могут быть использованы в учебном процессе высших учебных заведений: лекции, спецкурсы, пособия и др.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи в рецензируемых научных журналах

1. Берник, В. И. Распределение точек с действительными и целыми алгебраическими координатами на плоскости / В. И. Берник, А. В. Луневич // Вестник Могилевского государственного университета имени А. А. Кулешова. Сер. естественных наук. — 2014. — № 2. — С. 4—18.

2. Кудин, А. С. Аналог теоремы Хинчина в случае расходимости в трехмерном евклидовом пространстве / А. С. Кудин, А. В. Луневич // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. — 2015. — № 3. С. 66—81.

3. Кудин, А. С. Аналог теоремы Хинчина в случае расходимости в полях действительных комплексных и p-адических чисел / А. С. Кудин, А. В. Луневич // Труды Института математики. — 2015. — Том 23, № 1. — С. 76—83.

4. Луневич, А. В. Размерность Хаусдорфа множества действительных, комплексных и p-адических чисел с заданным порядком приближения алгебраическими числами / А. В. Луневич // Доклады НАН Беларуси. — Том 60, № 4. — С. 38—43.

5. Луневич, А. В. О количестве точек с алгебраическими координатами внутри полосы малой меры в поле $\mathbb{Q}_p$ / А. В. Луневич // Доклады НАН Беларуси. — Том 60, № 5. — С. 24—28.

Тезисы докладов на научных конференциях

6. Шамукова, Н. В. Об оценке сверху размерности Хаусдорфа в совместных приближениях алгебраическими числами / Н. В. Шамукова, Д. В. Коледа, А. В. Луневич // XII международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», посвященная восьмидесятилетию профессора Виктора Николаевича Латышева. Тула, 21—25 апр. 2014 г. / Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого. — Тула. — 2014. — С. 99—100.

7. Кудин, А.С. Теорема типа Хинчина для случая расходимости в трехмерном евклидовом пространстве / А. С. Кудин, А. В. Луневич, Н. В. Шамукова // Международная научная конференция «Дискретная математика, алгебра и их приложения» (DIMA-2015), посвященная столетию со дня рождения академика Д. А. Супруненко. Минск, 14—18 сент. 2015 г. / Институт математики НАН Беларуси; редкол.: И. Д. Супруненко, В. В. Лепин, О. И. Дугинов. – Минск. — 2015. — С. 32—33.

8. Кудин, А. С. Аналог теоремы Хинчина для случая расходимости в совместных диофантовых приближениях в разных метриках / А. С. Кудин, А. В. Луневич // XIII международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная восьмидесятипятилетию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова. Тула, 25—30 мая 2015 г. / Изд-во Тул. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого. — Тула. — 2015. — С. 272—274.

9. Луневич, А. В. О размерности Хаусдорфа множества точек пространства с заданным порядком близости к точкам с алгебраическими координатами / А. В. Луневич // XII Белорусская математическая конференция БМК-2016. Минск, 5—10 сент. 2016 г. / Институт математики НАН Беларуси. — Минск. — 2016. — С. 38—39.

РЭЗЮМЭ

Луневіч Арцём Вадзімавіч

Памернасць Хаўсдорфа ў сумесных дыяфантавых набліжэннях залежных велічынь

Ключавыя словы: дыяфантавы набліжэнні, алгебраічныя лікі, тэарэма тыпу Хінчына, памернасць Хаўсдорфа, рэгулярныя сістэмы.

Мэта працы: даследаванне размеркавання алгебраічных пунктаў у эўклідавых і неэўклідавых прасторах, доказы аналагаў тэарэмы Хінчына і знаходжанне памернасці Хаусдорфа мноства пунктаў, добра набліжаемых алгебраічнымі пунктамі; атрыманне эфектыўных колькасных вынікаў у гэтых напрамках.

Метады даследавання: метады метрычнай тэорыі дыяфантавых набліжэнняў, тэорыі трансцэндэнтных лікаў, геаметрыі лікаў.

Атрыманыя вынікі і іх навізна. У дысертацыі атрыманы наступныя новыя вынікі:

- даказана рэгулярнасць мноства алгебраічных пунктаў на плоскасці;
- даказаны аналаг тэарэмы Хінчына ў выпадку разбежнасці для прасторы $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$;
- знойдзена дакладнае значэнне памернасці Хаўсдорфа мноства пунктаў з $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$, маючых дадзены парадак набліжэння;
- атрымана ацэнка колькасці алгебраічных пунктаў паблізу нармальнай па Малеру крывой ў прасторы $\mathbb{Q}_p^2$.

Рэкамендацыі па выкарыстанні. Атрыманыя вынікі маюць тэарэтычны характар. Пабудаваная на плоскасці рэгулярная сістэма алгебраічных пунктаў і аналаг тэарэмы Хінчына ў выпадку разбежнасці могуць быць выкарыстаны ў якасці асновы для абагульнення на прасторы больш вялікіх памернасцей. Атрыманае дакладнае значэнне памернасці Хаўсдорфа пунктаў з $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$, добра набліжаемых алгебраічнымі пунктамі, і ацэнка колькасці алгебраічных пунктаў паблізу нармальнай па Малеру крывой у полі $\mathbb{Q}_p$ могуць быць выкарыстаны для вывучэння мностваў нулявой меры, якія складаюцца з пунктаў, добра набліжаемых алгебраічнымі лікамі. Атрыманыя вынікі таксама могуць быць выкарыстаны ў навучальным працэсе вышэйшых навучальных устаноў: лекцыі, спецкурсы, дапаможнікі і інш.

Галіна прымянення: метрычная тэорыя дыяфантавых набліжэнняў, геаметрыя лікаў.

РЕЗЮМЕ

Луневич Артём Вадимович

Размерность Хаусдорфа в совместных диофантовых приближениях зависимых величин

Ключевые слова: диофантовы приближения, алгебраические числа, теорема типа Хинчина, размерность Хаусдорфа, регулярные системы.

Цель работы: исследование распределения алгебраических точек в евклидовых и неевклидовых пространствах, доказательства аналогов теоремы Хинчина и нахождение размерности Хаусдорфа множества точек вблизи алгебраических точек; получение эффективных количественных результатов в этих направлениях.

Методы исследования: методы метрической теории диофантовых приближений, теории трансцендентных чисел, геометрии чисел.

Полученные результаты и их новизна. В диссертации получены следующие новые результаты:

- доказана регулярность множества алгебраических точек на плоскости;
- доказан аналог теоремы Хинчина в случае расходимости для пространства $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$;
- найдено точное значение размерности Хаусдорфа множества точек из $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$, приближаемых с заданным порядком алгебраическими точками из этого пространства;
- получена оценка количества алгебраических точек вблизи нормальной по Малеру кривой в пространстве $\mathbb{Q}_p^2$.

Рекомендации по использованию. Полученные результаты имеют теоретический характер. Построенная на плоскости регулярная система алгебраических точек и аналог теоремы Хинчина в случае расходимости могут быть использованы в качестве основы для обобщения на пространства больших размерностей. Полученное точное значение размерности Хаусдорфа точек из $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$, хорошо приближаемых алгебраическими точками, и оценка количества алгебраических точек вблизи нормальной по Малеру кривой в поле $\mathbb{Q}_p$ могут быть использованы для изучения множеств нулевой меры, сформированных из точек, хорошо приближаемых алгебраическими числами. Полученные результаты также могут быть использованы в учебном процессе высших учебных заведений: лекции, спецкурсы, пособия и др.

Область использования: метрическая теория диофантовых приближений, геометрия чисел.

SUMMARY

Lunevich Artyom Vadimovich

Hausdorff dimension in simultaneous Diophantine approximation of dependent variables

Keywords: Diophantine approximation, algebraic numbers, Khinchine-type theorems, Hausdorff dimension, regular systems.

Aim of the research: to study the distribution of algebraic points in Euclidean and non-Euclidean spaces, to prove Khinchine-type theorems and to find the Hausdorff dimension of sets of points which are well-approximable by algebraic numbers; to obtain effective quantitative results in these directions.

Methods of the research: methods of metric theory of Diophantine approximation, theory of transcendental numbers and geometry of numbers.

Obtained results and their novelty. The following new results have been obtained:

- regularity of a particular set of algebraic points in the Euclidean plane has been proved;
- the case of divergence has been proved for a Khinchine-type theorem in the space $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$;
- the exact Hausdorff dimension has been found for the set of points in $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ which have a given order of approximation by algebraic points from the same space;
- an estimate has been obtained for the number of algebraic points lying close to a normal curve (in the sense of Mahler) in the space $\mathbb{Q}_p^2$.

Recommendations for use. The obtained results are theoretical. The constructed regular system of algebraic points in the Euclidean plane and the proved divergence case in a Khinchine-type theorem can be used as a basis for generalization of these results to spaces of higher dimension. The calculation of the exact Hausdorff dimension of well-approximable points in $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ and the estimate of the number of algebraic points lying close to normal curves (in the sense of Mahler) in $\mathbb{Q}_p$ can be used to study the structure of other sets constructed from points characterized by good approximation by algebraic numbers in a variety of metric spaces. The results can also be used to prepare educational material for universities: lectures, course material, manuals, etc.

Areas of application: metric theory of Diophantine approximation, geometry of numbers.

ЛУНЕВИЧ
Артём Вадимович

РАЗМЕРНОСТЬ ХАУСДОРФА В СОВМЕСТНЫХ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

Подписано в печать 22 июня 2017 г.
Формат $60 \times 84/16$.
Усл. печ. л. 1,16. Уч.-изд. л. 1,05.
Тираж 60 экз. Заказ № 4.
Отпечатано на ксероксе Института математики НАН Беларуси.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изделий №1/257 от 2 апреля 2014 г.
220072, Минск, ул. Сурганова, 11.