Государственное научное учреждение
«Институт математики Национальной академии наук Беларуси»

УДК 517.956.32

НОВИКОВ
Евгений Николаевич

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ С ПЕРВОЙ И ВТОРОЙ КОСЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Минск, 2017

Работа выполнена в Белорусском государственном университете.

Научный руководитель:

Ломовцев Фёдор Егорович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математической кибернетики Белорусского государственного университета.

Официальные оппоненты:

Бахтин Виктор Иванович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры нелинейного анализа и аналитической экономики Белорусского государственного университета;

Басик Александр Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений Учреждения образования "Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина".

Оппонирующая организация: **Учреждение образования «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы»**.

Защита состоится "21" сентября 2017 г. в 15:30 на заседании совета по защите диссертаций Д 01.01.02 при Государственном научном учреждении «Институт математики НАН Беларуси» по адресу: 220072, г. Минск, ул. Сурганова, 11. Телефон ученого секретаря: +(375 17) 284 17 81. Email: svl@im.bas-net.by.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Государственного научного учреждения «Институт математики НАН Беларуси».

Автореферат разослан « ___» __________ 2017 г.

Ученый секретарь совета
по защите диссертаций Д 01.01.02
кандидат физ.-мат. наук С.В. Лемешевский

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей диссертации полностью решены и исследованы на корректность две линейные смешанные (начально-краевые) задачи для простейшего и более общего стационарного (не зависящего от времени) неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при нестационарных (зависящих от времени) нехарактеристических (направленных не по характеристикам уравнения) первых и вторых косых производных в граничных условиях соответственно в случае классических решений. Выведены явные рекуррентные формулы классических решений и установлены необходимые и достаточные условия корректности по Адамару (существования, единственности и непрерывной зависимости решений) этих смешанных задач без продолжения исходных данных (правых частей уравнений, начальных данных и граничных данных) смешанных задач вне множеств их задания. Для каждой смешанной задачи эти необходимые и достаточные условия (критерии) корректности состоят из требований гладкости на исходные данные и условий согласования граничных условий с начальными условиями и дифференциальным уравнением. Непрерывная зависимость классических решений от исходных данных этих задач в соответствующей паре банаховых пространств решений и исходных данных задач, наделенных соответствующими топологиями равномерной сходимости, следует из теорем Банаха о замкнутом графике или об открытом отображении, а также непосредственно вытекает из явных формул решений.

Указанные две смешанные задачи решены и исследованы новым методом "вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны", предложенным Ф.Е. Ломовцевым. Алгоритм решения и исследования смешанных задач для ограниченной струны этим методом включает этапы:

1. Постановка, решение и исследование корректности вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны в четверти плоскости.

2. Физико-геометрическая интерпретация решений вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны в четверти плоскости.

3. Вывод рекуррентных формул решений и критериев корректности основных смешанных задач для ограниченной струны из решений и критериев корректности вспомогательных смешанных задач.

На первом этапе вспомогательные смешанные задачи для полуограниченной струны, как правило, легко решаются и исследуются известными общими методами. На втором этапе проводится физико-геометрическая интерпретация явных решений вспомогательных смешанных задач для того, чтобы выявить множество зависимости их решений, т. е. множество изменения независимых переменных решений. Если физико-геометрическая интерпретация показывает, что значение классического решения в любой вершине четверти плоскости полностью и однозначно определяется значениями правой части уравнения, начальных данных, граничных данных и зависящих от времени коэффициентов граничных условий в пересечении её характеристического треугольника с четвертью плоскости, то можно переходить к следующему этапу. На третьем этапе полуполоса плоскости представляется в виде предела соответствующей последовательности расширяющихся по времени прямоугольников. Сначала с помощью геометрической интерпретации выводятся решения и критерии корректности основных смешанных задач для ограниченной струны в первом прямоугольнике только из решений и критериев корректности вспомогательных смешанных задач в четверти плоскости, не решая каких-либо смешанных задач. Затем строятся рекуррентные формулы решений и критерии корректности основных смешанных задач для ограниченной струны в остальных расширяющихся по времени прямоугольниках и проводится их доказательство методом математической индукции.

Принципиальное *преимущество* этого метода перед традиционными методами (продолжений, отражений, разделения переменных, интегральных преобразований и другими) состоит в возможности получать *глобальные* (наиболее общие) *результаты*: теоремы существования и единственности, явные аналитические решения, критерии корректности, потому что он не требует продолжений исходных данных смешанных задач вне множеств их задания. Поскольку метод продолжений всегда требует от некоторых или всех исходных данных возможности соответствующих продолжений вне множеств задания, то заведомо сужается общность получаемых результатов.

Тема диссертации является *актуальной*, потому что исследуемыми в диссертации смешанными задачи моделируется волновой процесс вынужденных плоских колебаний сплошных сред (струны, стержня, мембраны, объемного тела, газа и других веществ), силы тока и напряжения в проводах электрических сетей, давления и скорости в гидродинамике в результате действия вынуждающей силы, начального смещения и начальной скорости во всех точках среды и нестационарных нехарактеристических граничных режимов с одной и двумя косыми производными. В частном случае этими смешанными задачами математически описываются вынужденные колебания упругой однородной струны, представляющие собой суперпозицию прямой волны и обратной волны, движущихся во взаимно противоположных направлениях с постоянными и возможно разными скоростями в покоящейся или движущейся упруго сопротивляющейся или содействующей среде. Волновой процесс происходит за счет воздействия вынуждающей силы, начального смещения и начальной скорости на все точки струны и изменяющихся во времени нехарактеристических граничных режимов на концах ограниченной струны, испытывающих сопротивление или содействие среды. Эти граничные режимы включают нестационарные упругие и динамические колебания, колебания при заданных ускорениях, скоростях и смещениях концов струны. Их зависимость от времени вызывает особую трудность исследования.

Научная новизна результатов диссертации состоит в явных решениях и критериях корректности во множестве классических решений двух новых линейных смешанных задач для вынужденных колебаний ограниченной струны при нехарактеристических нестационарных первых и вторых косых производных в граничных условиях. Смешанная задача с нестационарной первой косой производной в граничном условии для свободных колебаний полуограниченной струны решена методом характеристик Барановской С.Н. и Юрчуком Н.И. Сначала Чернятин В.А. методом Фурье и Егоров Ю.В. сведением к интегральным уравнениям и последовательными приближениями получили необходимые и достаточные условия на начальные данные первой смешанной задачи для однородного телеграфного уравнения. Необходимые и достаточные условия на нечетные продолжения правой части и начальных данных установлены Чернятиным В.А. методом Фурье и уточненных асимптотических формул собственных функций первой смешанной задачи для уравнения колебаний ограниченной струны. Затем методами продолжений и априорных оценок эти результаты были обобщены Юрчуком Н.И., Яшкиным В.И. и другими на гиперболические уравнения второго и высших четных порядков. Линейные смешанные задачи для уравнения колебаний ограниченной струны при стационарных локальных граничных условиях исследовались Корзюком В.И., Козловской И.С., Моисеевым Е.И., Чеб Е.С. и другими методами продолжений, методом Фурье, интегральных преобразований Фурье и Лапласа и другими. Корзюк В.И., Кулешов А.А., Пулькина Л.С и другие изучали корректность смешанных задач для гиперболических уравнений второго порядка при стационарных нелокальных (двухточечных и интегральных) граничных условиях. Вагабов А.И. решал методом Фурье многомерные смешанные задачи при граничных условиях первого рода. Обосновав метод Фурье методом контурного интегрирования резольвенты спектрального оператора, Хромов А.П. нашёл минимальные условия на начальное смещение для классических решений смешанной задачи при свободных колебаниях струны со стационарными двухточечными граничными условиями. Методами регуляризации, продолжения по параметру и априорных оценок Кожанов А.И. доказал теоремы существования единственных классических решений смешанных задач для неоднородных гиперболических уравнений при нестационарных пространственно нелокальных многоточечных граничных условиях.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами (проектами) и темами

Работа над диссертацией проводилась на кафедре математической кибернетики Белорусского государственного университета в соответствии с заданиями научных программ, выполнявшихся в рамках: Госбюджетной НИР Белорусского государственного университета по теме «Разработка математических методов для исследования задач математической физики и дифференциальных уравнений с частными производными», выполняемой по заданию «Конвергенция 1.2.03.3» ГПНИ "Конвергенция" (подпрограмма «Математические методы»), № НИР-50 от 10 февраля 2014 г., номер госрегистрации № 20113524, срок выполнения 2011 г.– 2015 г. и Госбюджетной НИР Белорусского государственного университета по теме «Разработка математических методов исследования и решения смешанных задач для дифференциальных уравнений с частными производными при нестационарных граничных условиях», выполняемой по заданию «Конвергенция 1.2.03.2» ГПНИ "Конвергенция-2020" (подпрограмма «Методы математического моделирования сложных систем»), № НИР-71 от 10 марта 2016 г., номер госрегистрации № 20161317, срок выполнения 2016 г.– 2020 г. Тема диссертации утверждена Советом механико-математического факультета Белорусского государственного университета, протокол № 2 от 12 ноября 2013 г.

Цель и задачи исследования

Цель исследования – нахождение классических решений в явном виде и выявление необходимых и достаточных условий на исходные данные (правую часть уравнений, граничные данные и начальные данные) для корректной разрешимости по Адамару во множестве классических решений линейных смешанных задач для вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с нехарактеристическими первыми и вторыми косыми производными.

Цель исследования предопределила следующие *задачи исследования*:

1. Найти в явном аналитическом виде классические решения смешанных задач для неоднородных уравнений колебаний полуограниченной и ограниченной струны при нехарактеристических первых и вторых косых производных в нестационарных граничных условиях.

2. Выявить необходимые и достаточные условия на исходные данные, которые обеспечивают существование единственных классических решений смешанных задач для неоднородных уравнений колебаний полуограниченной и ограниченной струны при нехарактеристических первых и вторых косых производных в нестационарных граничных условиях.

3. Провести дополнительную проверку правильности полученных в диссертации классических решений смешанных задач для неоднородных уравнений колебаний полуограниченной и ограниченной струны при нехарактеристических первых и вторых косых производных в нестационарных граничных условиях с помощью персонального компьютера в системе Mathematica 10.

Объектом исследования являются линейные смешанные задачи для неоднородного уравнения колебаний полуограниченной и ограниченной струны при зависящих от времени коэффициентах в граничных условиях, содержащих все нехарактеристические частные производные первого порядка и некоторые частные производные второго порядка.

Предмет исследования – существование, единственность и явные формулы классических решений, необходимые и достаточные условия на исходные данные линейных смешанных задач для неоднородного уравнения колебаний струны при нестационарных граничных условиях с нехарактеристическими первыми и вторыми косыми производными.

Выбор указанных объекта и предмета исследования нужен для обоснования корректности по Адамару во множестве классических решений изучаемых смешанных задач в настоящей диссертационной работе.

Научная новизна

Научная новизна диссертационного исследования состоит в явном решении двух смешанных задач для неоднородного уравнения колебаний струны при зависящих от времени коэффициентах в граничных условиях с нехарактеристическими первыми и вторыми косыми производными соответственно, а также в нахождении необходимых и достаточных условий однозначной и устойчивой везде разрешимости этих смешанных задач без продолжений исходных данных вне множеств их задания.

Исследование имеет, в основном, теоретический характер. Его *практическая значимость* заключается в том, что изученными нестационарными смешанными задачами моделируются некоторые вынужденные колебания, упругость, вибрация и акустика соответственно струны, стержня, мембраны и объёмных тел для случая зависящих от времени сложных граничных режимов как в несопротивляющихся покоящихся, так и в сопротивляющихся движущихся средах.

Его результаты могут быть использованы в учебном процессе при чтении лекций и проведении практических занятий по общему курсу "Уравнения математической физики" , чтении лекций и проведении семинарских занятий по специальным курсам "Дифференциально-операторные уравнения" , "Краевые задачи в микроэлектронике" и в научных исследованиях в Белорусском, Витебском, Гродненском, Могилевском, Московском, Санкт-Петербургском, Новосибирском и Иркутском университетах, Институте математики НАН Беларуси и Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН.

Положения, выносимые на защиту На защиту выносятся:

1. Рекуррентные формулы единственных классических решений двух линейных смешанных задач для простейшего и более общего факторизованного неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны соответственно при нехарактеристических нестационарных первых и полунестационарных вторых косых производных в граничных условиях.

2. Необходимые и достаточные требования гладкости и условия согласования, обеспечивающие однозначную и устойчивую везде разрешимость во множестве классических решений двух линейных смешанных задач для простейшего и более общего факторизованного неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны соответственно при нехарактеристических нестационарных первых и полунестационарных вторых косых производных в граничных условиях.

3. Доказательство теорем о рекуррентных формулах единственных классических решений и необходимых и достаточных условиях однозначной и устойчивой везде разрешимости этих двух смешанных задач для простейшего и более общего факторизованного неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны.

Личный вклад соискателя

Основные результаты диссертации получены лично соискателем. В совместных работах [1–7, 9–20] научный руководитель Ф.Е. Ломовцев сформулировал цель, поставил задачи исследования и предложил метод "вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны" для нахождения решений и необходимых и достаточных условий корректности смешанных задач, моделирующих вынужденные колебания ограниченной струны, с помощью решений и необходимых и достаточных условий существования и единственности решений соответствующих смешанных задач, моделирующих вынужденные колебания полуограниченной струны. Идея вывода дважды непрерывной дифференцируемости частного решения простейшего неоднородного уравнения колебаний струны с помощью энергетического неравенства (априорной оценки) решений второй смешанной задачи для этого уравнения принадлежит Н.И. Юрчуку в совместной работе [8].

Апробация результатов диссертации

Результаты диссертационной работы обсуждались на: 1) научном семинаре кафедры математической кибернетики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, Минск, 2013–2017; 2) городском семинаре по математическому моделированию и дифференциальным уравнениям с частными производными, Минск, 2015–2016; и докладывались на научных конференциях: 1) 67-й научной конференции студентов и аспирантов Белгосуниверситета. Минск, БГУ, 17-20 мая 2010 года; 2) XIV Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения - 2011», Новополоцк, 12-14 мая 2011 года; 3) 68-й научной конференции студентов и аспирантов Белгосуниверситета. Минск, БГУ, 16-19 мая 2011 года; 4) Международной конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений» (AMADE-2011), Минск, Беларусь, 12-17 сентября 2011 года; 5) 69-й научной конференции студентов и аспирантов Белгосуниверситета. Минск, БГУ, 14-17 мая 2012 года; 6) Международной научная конференция «XI Белорусская математическая конференция», Минск, 4-9 ноября 2012 года; 7) XV Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения - 2013», Гродно, 15-17 мая 2013 года; 8) 70-й научной конференции студентов и аспирантов Белгосуниверситета. Минск, БГУ, 15-18 мая 2013 года; 9) 71-й научной конференции студентов и аспирантов Белгосуниверситета. Минск, БГУ, 18-21 мая 2014 года; 10) XVI Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения - 2014», Новополоцк, 20-22 мая 2014 года; 11) 72-й научной конференции студентов и аспирантов Белгосуниверситета. Минск, БГУ, 18-22 мая 2015 года. 12) Международной конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений» (AMADE-2015), Минск, Беларусь, 14-19 сентября 2015 года;

Опубликованность результатов диссертации

Результаты диссертации опубликованы в 20 научных работах, в том числе в 8 статьях в рецензируемых научных журналах из перечня ВАК Республики Беларусь, 5 статьях в материалах математических школ и 7 тезисах докладов международных научных конференций. Общее количество опубликованных материалов составляет 4,8 авторского листа, из них 3,2 авторского листа в изданиях, соответствующих пункту 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, перечня условных обозначений, общей характеристики работы, трех глав, заключения, библиографического списка и приложений. Полный объем диссертации составляет 258 страниц, в том числе 6 рисунков на 3 страницах, 4 приложения на 114 страницах и библиографических источников на 15 страницах, в том числе 20 публикаций автора по теме диссертации.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** указаны результаты, перечислены основные методы, обоснована актуальность темы и описана новизна результатов диссертации.

Первая глава посвящена обзору научной литературы по теме диссертации, сравнительному анализу методов и результатов диссертации.

Во **второй главе** в разделе 2.1 на множестве $G = [0,\, d] \times [0,\, \infty[$ ставится смешанная задача для уравнения колебаний ограниченной струны

$$\partial_{tt}u(x,t) - a^2\partial_{xx}u(x,t) = f(x,t),\; a > 0,\; (x,t) \in G, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\; \partial_t u|_{t=0} = \psi(x),\; x \in [0,\, d], \tag{2}$$

$$[\alpha_i(t)\partial_t u + \beta_i(t)\partial_x u + \gamma_i(t)u]|_{x=\hat{d}_i} = \mu_i(t),\; t \geq 0,\; \hat{d}_i = (i-1)d,\; i = 1,\, 2. \tag{3}$$

В разделе 2.2 изучается вспомогательная смешанная задача на $G_\infty = [0,\, \infty[\times[0,\, \infty[$ для уравнения (1) колебаний полуограниченной струны при начальных условиях (2) для $x \in [0, \infty[$ и одном граничном условии из (3) для $i = 1$ при $\alpha_1 = \alpha,\, \beta_1 = \beta,\; \gamma_1 = \gamma,\, \mu_1 = \mu$:

$$[\alpha(t)\partial_t u + \beta(t)\partial_x u + \gamma(t)u]|_{x=0} = \mu(t),\; t \geq 0. \tag{4}$$

В главе 2 (главе 3) $\overline{G}_-$ – замыкание множества $G_- = \{(x,t) \in G_\infty : x > at\}$ $(x > a_1 t)$, $G_+ = G_\infty \setminus G_-$ и $\dot{G}_+ = G_\infty \setminus \overline{G}_-$. Пусть $C^k(\Omega)$ – множество k раз непрерывно дифференцируемых функций на множестве Ω, $C^0(\Omega) = C(\Omega)$. Из определения классических решений $u \in C^2(G_\infty)$ задачи (1),(2),(4) следует необходимость условий:

$$f \in C(G_\infty),\; \varphi \in C^2[0, \infty[,\; \psi \in C^1[0, \infty[,\; \mu \in C^1[0, \infty[, \tag{5}$$

$$\alpha(0)\psi(0) + \beta(0)\varphi'(0) + \gamma(0)\varphi(0) = \mu(0), \tag{6}$$

$$\begin{gathered}\alpha(0)(a^2\varphi''(0) + f(0,0)) + (\alpha'(0) + \gamma(0))\psi(0) + \\ + \beta(0)\psi'(0) + \beta'(0)\varphi'(0) + \gamma'(0)\varphi(0) = \mu'(0).\end{gathered} \tag{7}$$

Методом характеристик доказывается

Теорема 2.1 [1, 14]. *Пусть выполняются требования гладкости: $\alpha,\, \beta,\, \gamma \in C^1\,[0, \infty[$ и нехарактеристичности первой косой производной в граничном условии: $a\alpha(t) \neq \beta(t)$, $t \in [0, \infty[$. Смешанная задача (1),(2),(4) имеет единственное устойчивое классическое решение $u \in C^2(G_\infty)$ тогда и только тогда, когда выполняются требования гладкости (5) и*

$$\int\limits_0^t f(|x + (-1)^i a(t-\tau)|, \tau)\,d\tau \in C^1(G_\infty),\; i = 1,\, 2, \tag{8}$$

условия согласования (6), (7), и этим решением является функция:

$$u_-(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\nu)d\nu+F(x,t),(x,t)\in G_-,$$

$$u_+(x,t)=\frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(\nu)d\nu+F(x,t)+$$

$$+\varphi(0)e^{a\int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{0}\frac{\gamma(s)}{a\alpha(s)-\beta(s)}ds}+\int\limits_{0}^{t-\frac{x}{a}}\frac{e^{a\int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{\nu}\frac{\gamma(s)}{a\alpha(s)-\beta(s)}ds}}{a\alpha(\nu)-\beta(\nu)}\times$$

$$\times\left[a\mu(\nu)-\beta(\nu)\left(a\varphi'(a\nu)+\psi(a\nu)\right)\right]d\nu-\int\limits_{0}^{t-\frac{x}{a}}\frac{e^{a\int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{\nu}\frac{\gamma(s)}{a\alpha(s)-\beta(s)}ds}}{a\alpha(\nu)-\beta(\nu)}\Bigg\{a\alpha(\nu)\times$$

$$\times\int\limits_{0}^{\nu}f(a(\nu-\tau),\tau)d\tau+\gamma(\nu)\int\limits_{0}^{\nu}\int\limits_{0}^{a(\nu-\tau)}f(s,\tau)dsd\tau\Bigg\}d\nu,\ (x,t)\in G_+,$$

где частное решение неоднородного уравнения (1) имеет вид

$$F(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(|s|,\tau)ds\,d\tau.$$

Характеристика $x=at$ называется *критической* для уравнения (1) в G_∞. В разделе 2.3 ищется множество изменения переменных x и t решения вспомогательной задачи путем *физико-геометрической интерпретации*:

1. Значение решения $u(M)$ в вершине $M(x_0,t_0)\in\overline{G}_-$ любого характеристического треугольника ΔMPQ однозначно определяется начальным отклонением φ в вершинах $P(x_0-at_0,0)$ и $Q(x_0+at_0,0)$ его основания PQ, начальной скоростью ψ на основании PQ и правой частью f на ΔMPQ.

2. Значение решения $u(M)$ в вершине $M(x_0,t_0)\in\dot{G}_+$ любого характеристического треугольника ΔMPQ однозначно определяется начальным отклонением φ в точках $O(0,0)$, $P'(at_0-x_0,0)$, $Q(x_0+at_0,0)$, её производной φ' по x и начальной скоростью ψ на части OQ основания PQ, правой частью f на $\Delta MPQ\cap G_\infty$, граничным данным μ и коэффициентами α, β, γ граничного условия (4) при $x=0$ для $t\in[0,t_0']$, $t_0'=t_0-x_0/a$.

Треугольники ΔMPQ и $\Delta Q'PP'$, где точка $Q'(0,t_0')$, называются соответственно *характеристическим* и *критическим* для точки $M(x_0,t_0)$.

Эта интерпретация позволяет применить к задаче (1)–(3) третий этап метода "вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны". В разделе 2.4 для решения задачи (1)–(3) с помощью теоремы 2.1 полуполосу G заменяем расширяющимися по времени t прямоугольниками $Q_n = [0, d] \times [0,\, d_{n+1}]$, где $d_n = (n-1)d/(2a)$, $n = 1,\, 2, \ldots$ Для записи рекуррентных формул её решения разбиваем полуполосу G на прямоугольники $G_n = [0, d] \times [d_n,\, d_{n+1}]$, $n = 1,\, 2, \ldots,$ с высотой $d/(2a)$, равной времени однократного прохождения длины струны прямой и обратной волнами одновременно, и характеристиками $x = at_n$, $x + at_n = d$, $n = 1,\, 2, \ldots,$ уравнения (1), названными нами *критическими* для задачи (1)–(3), на треугольники:

$$\Delta_{3n-2} = \{(x, t) : \, x > at_n,\, x + at_n < d,\, x \in]0,\, d[\},$$

$$\Delta_{3n-1} = \big\{(x, t) : \, x \le at_n,\, x \in [0,\, d/2],\, t \in [d_n,\, d_{n+1}]\big\},$$

$$\Delta_{3n} = \big\{(x, t) : x + at_n \ge d,\, x \in [d/2,\, d]\big\},\, t \in [d_n, d_{n+1}], t_n = t - d_n,\, n = 1, 2, \ldots$$

Теорема 2.2 [2, 10, 11, 16, 17]. *Пусть выполняются требования гладкости коэффициентов:* $\alpha_i,\, \beta_i,\, \gamma_i \in C^1[0, \infty[$ *и условия нехарактеристичности первых косых производных в граничных условиях:* $a\alpha_i(t) \neq (-1)^{i+1}\beta_i(t)$, $t \in [0, \infty[$, $i = 1,\, 2$. *Смешанная задача (1)–(3) в* G *имеет единственное устойчивое классическое решение* $u \in C^2(G)$ *тогда и только тогда, когда выполняются требования гладкости:*

$$f \in C(G),\, \varphi \in C^2[0, d],\, \psi \in C^1[0, d],\, \mu_i \in C^1[0, \infty[,\, i = 1,\, 2,$$

$$\int_{d_n}^{t} f(|d - |d - x - (-1)^i a(t - \tau)||, \tau)\, d\tau \in C^1(G_n),\, i = 1,\, 2,\, n = 1,\, 2, \ldots, \quad (9)$$

условия согласования:

$$\alpha_i(0)\psi(\hat{d}_i) + \beta_i(0)\varphi'(\hat{d}_i) + \gamma_i(0)\varphi(\hat{d}_i) = \mu_i(0),\, i = 1,\, 2,$$

$$\alpha_i(0)\left(a^2\varphi''(\hat{d}_i) + f(\hat{d}_i, 0)\right) + (\alpha_i'(0) + \gamma_i(0))\psi(\hat{d}_i) + \beta_i(0)\psi'(\hat{d}_i) +$$

$$+\beta_i'(0)\varphi'(\hat{d}_i) + \gamma_i'(0)\varphi(\hat{d}_i) = \mu_i'(0),\, \hat{d}_i = (i-1)d,\, i = 1,\, 2,$$

и таким решением является функция:

$$u_{3n-2}(x, t) = \frac{\varphi_n(x + at_n) + \varphi_n(x - at_n)}{2} +$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at_n}^{x+at_n} \psi_n(\nu)d\nu + F_n^{(1)}(x, t),\, (x, t) \in \Delta_{3n-2},$$

$$u_{3n-1}(x, t) = \frac{\varphi_n(x + at_n) - \varphi_n(at_n - x)}{2} +$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{at_n-x}^{x+at_n}\psi_n(\nu)d\nu+F_n^{(1)}(x,t)+\Phi_n^{(1)}(t-x/a)-$$

$$-\Psi_n^{(1)}(t-x/a)+\varphi_n(0)e^{a\int\limits_{t-x/a}^{d_n}\frac{\gamma_1(s)ds}{a\alpha_1(s)-\beta_1(s)}},\ (x,t)\in\Delta_{3n-1},$$

$$u_{3n}(x,t)=\frac{\varphi_n(x-at_n)-\varphi_n(2d-x-at_n)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at_n}^{2d-x-at_n}\psi_n(\nu)d\nu+F_n^{(2)}(x,t)+\Phi_n^{(2)}(t-(d-x)/a)-$$

$$-\Psi_n^{(2)}(t-(d-x)/a)+\varphi_n(d)e^{a\int\limits_{t-(d-x)/a}^{d_n}\frac{\gamma_2(s)ds}{a\alpha_2(s)+\beta_2(s)}},\ (x,t)\in\Delta_{3n},\ n=1,\,2,...,$$

где u_{3n-k} – сужения решения u на Δ_{3n-k}, $k=0,\,1,\,2,$ а рекуррентные начальные данные и вспомогательные функции задаются формулами:

$$\varphi_1(x)=\varphi(x),\ \psi_1(x)=\psi(x),\ x\in[0,d],\ \varphi_k(x)=u_{3k-4+j}(x,\,t)\big|_{t=d_k},$$

$$\psi_k(x)=\partial_t u_{3k-4+j}(x,\,t)\big|_{t=d_k},\ x\in[jd/2,\,(1+j)d/2],\ j=0,\,1,\ k=2,...,$$

$$\Phi_n^{(i)}(\xi)=\int\limits_{d_n}^{\xi}\frac{e^{a\int\limits_{\xi}^{\nu}\frac{\gamma_i(s)ds}{a\alpha_i(s)+(-1)^i\beta_i(s)}}}{a\alpha_i(\nu)+(-1)^i\beta_i(\nu)}\Big\{a\mu_i(\nu)-\beta_i(\nu)\times$$

$$\times\Big[\varphi_n'\left(p_i(a(\nu-d_n))\right)-(-1)^i\psi_n\left(p_i(a(\nu-d_n))\right)\Big]\Big\}d\nu,\ i=1,\,2.$$

В этой теореме использованы следующие обозначения:

$$F_n^{(i)}(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_{d_n}^{t}\int\limits_{p_i(x)-a(t-\tau)}^{p_i(x)+a(t-\tau)}f(p_i(|s|),\tau)ds\,d\tau,\ p_i(x)=\hat{d}_i-(-1)^i x,$$

$$\Psi_n^{(i)}(\xi)=\int\limits_{d_n}^{\xi}\frac{e^{a\int\limits_{\xi}^{\nu}\frac{\gamma_i(s)ds}{a\alpha_i(s)+(-1)^i\beta_i(s)}}}{a\alpha_i(\nu)+(-1)^i\beta_i(\nu)}\Big\{a\alpha_i(\nu)\int\limits_{d_n}^{\nu}f\left(p_i(a(\nu-\tau)),\tau\right)d\tau+$$

$$+\gamma_i(\nu)\int\limits_{d_n}^{\nu}\int\limits_{0}^{a(\nu-\tau)}f(p_i(s),\tau)dsd\tau\Big\}d\nu,\ \hat{d}_i=(i-1)d,\ i=1,\,2.$$

В **третьей главе** в разделе 3.1 на множестве $G=[0,\,d]\times[0,\,\infty[$ ставится смешанная задача для уравнения колебаний ограниченной струны

$$\left(\partial_t-a_2\partial_x+b_2\right)\left(\partial_t+a_1\partial_x+b_1\right)u(x,t)=f(x,t),\ a_1,\ a_2>0,\ (x,t)\in G,\quad (10)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\, \partial_t u|_{t=0} = \psi(x),\, x \in [0,\, d], \tag{11}$$

$$[\Gamma_i(t)u]|_{x=\hat{d}_i} \equiv [(\alpha_{i2}(t)\partial_t + \beta_{i2}(t)\partial_x + \gamma_{i2}(t))\,(\alpha_{i1}\partial_t + \beta_{i1}\partial_x + \gamma_{i1})\,u]|_{x=\hat{d}_i} =$$
$$= \mu_i(t),\, t \geq 0,\, \hat{d}_i = (i-1)d,\, i = 1,\, 2. \tag{12}$$

Раздел 3.2 посвящен изучению вспомогательной смешанной задачи на $G_\infty = [0,\infty[\times[0,\infty[$ для уравнения колебаний (10) полуограниченной струны при начальных условиях (11) для $x \in [0,\infty[$ и одном граничном условии из (12) при $\alpha_{1j} = \alpha_j$, $\beta_{1j} = \beta_j$, $\gamma_{1j} = \gamma_j$, $\mu_1 = \mu$, $j = 1,\, 2$, $i = 1$, для $t \in [0,\, \infty[$:

$$[\Gamma(t)u]|_{x=0} \equiv [(\alpha_2(t)\partial_t + \beta_2(t)\partial_x + \gamma_2(t))\,(\alpha_1\partial_t + \beta_1\partial_x + \gamma_1)\,u]|_{x=0} = \mu(t). \tag{13}$$

Из определения её классических решений вытекает необходимость условий:

$$f \in C(G_\infty),\, \varphi \in C^2[0,\infty[,\, \psi \in C^1[0,\infty[,\, \mu \in C[0,\infty[, \tag{14}$$

$$\alpha_2(0)\{\alpha_1[f(0,0) + (a_2 - a_1)\psi'(0) + a_1a_2\varphi''(0) - (b_2 + b_1)\psi(0) -$$
$$-(a_1b_2 - a_2b_1)\varphi'(0) - b_1b_2\varphi(0)] + \beta_1\psi'(0) + \gamma_1\psi(0)\} + \beta_2(0)[\alpha_1\psi'(0) +$$
$$+\beta_1\varphi''(0) + \gamma_1\varphi'(0)] + \gamma_2(0)[\alpha_1\psi(0) + \beta_1\varphi'(0) + \gamma_1\varphi(0)] = \mu(0). \tag{15}$$

Методом характеристик устанавливается

Теорема 3.1 [3, 4, 6, 19]. *Пусть выполняются требования гладкости: α_2, β_2, $\gamma_2 \in C[0,\infty[$ и нехарактеристичности первых косых производных: $a_1\alpha_i \neq \beta_i$, $t \in [0,\infty[$, $i = 1,\, 2$. Для того, чтобы смешанная задача (10),(11),(13) имела единственное устойчивое классическое решение $u \in C^2(G_\infty)$, достаточно требований гладкости (14), условия согласования (15) и требований*

$$\int\limits_0^t e^{b_i\tau} f\left(\left|x + (-1)^i a_i(t-\tau)\right|, \tau\right) d\tau \in C^1(G_\infty),\, i = 1,\, 2; \tag{16}$$

и необходимо выполнение требований гладкости (14), условия согласования (15), а в случае $a_1 = a_2 > 0$ ещё и требований гладкости (16). Таким классическим решением является функция:

$$u_-(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2}\Bigg(a_1e^{-b_2t}\varphi(x + a_2t) + a_2e^{-b_1t}\varphi(x - a_1t) +$$
$$+ e^{Bx-At}\int\limits_{x-a_1t}^{x+a_2t} e^{-Bs}\left[A\varphi(s) + \psi(s)\right] ds\Bigg) + F(x,t),\, (x,t) \in G_-,$$

$$u_+(x,t) = \Phi(x,t) + F(x,t) +$$

$$+a_1e^{Ct-Dx}\left[a_1\int\limits_0^{t-\frac{x}{a_1}}e^{-a_1D\rho}\int\limits_0^{\rho}\frac{P(\nu)e^{a_1\int\limits_\nu^\rho E(s)ds+b_1\nu}}{(a_1\alpha_1-\beta_1)(a_1\alpha_2(\nu)-\beta_2(\nu))}d\nu d\rho+\right.$$

$$\left.+\frac{b_2\varphi(0)+\psi(0)-a_2\varphi'(0)}{a_1+a_2}\int\limits_0^{t-\frac{x}{a_1}}e^{a_1\left(\int\limits_0^\rho E(s)ds-D\rho\right)}d\rho\right],\ (x,t)\in G_+,$$

где частное решение неоднородного уравнения (10) выражается формулой

$$F(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}e^{Bx-At}\int\limits_0^t e^{A\tau}\int\limits_{x-a_1(t-\tau)}^{x+a_2(t-\tau)}e^{-Bs}f(|s|,\tau)dsd\tau.$$

В этой теореме используются следующие обозначения

$$A=\frac{a_1b_2+a_2b_1}{a_1+a_2},\ B=\frac{b_2-b_1}{a_1+a_2},\ C=\frac{b_1\beta_1-a_1\gamma_1}{a_1\alpha_1-\beta_1},D=\frac{b_1\alpha_1-\gamma_1}{a_1\alpha_1-\beta_1},$$

$$E(t)=\frac{b_1\alpha_2(t)-\gamma_2(t)}{a_1\alpha_2(t)-\beta_2(t)},\Phi(x,t)=\frac{e^{-b_2t}}{a_1+a_2}\left(a_1\varphi(x+a_2t)+a_2e^{B(x+a_2t)}\varphi(0)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^{x+a_2t}e^{B(x-s+a_2t)}\left[A\varphi(s)+\psi(s)\right]ds\right),P(t)=\mu(t)-\left[\Gamma(t)\left(\Phi(x,t)+F(x,t)\right)\right]|_{x=0}.$$

Критической для уравнения (10) в первой четверти G_∞ называется характеристика $x=a_1t$. В разделе 3.3 с помощью *физико-геометрической интерпретации* мы находим множество изменения x и t для решения $u=u(x,t)$ этой вспомогательной задачи с $a_2>0$:

1. Значение решения $u(M)$ в вершине $M(x_0,t_0)\in\overline{G}_-$ любого характеристического треугольника ΔMPQ однозначно определяется начальным отклонением φ в вершинах $P(x_0{-}a_1t_0,0)$ и $Q(x_0{+}a_2t_0,0)$ его основания PQ, начальной скоростью ψ на основании PQ и правой частью f на ΔMPQ.

2. Значение решения $u(M)$ в вершине $M(x_0,t_0)\in\dot{G}_+$ любого треугольника ΔMPQ однозначно определяется начальным смещением φ и ее первыми двумя производными φ', φ'', начальной скоростью ψ и ее первой производной ψ' на отрезке OQ с концами $O(0,0)$ и $Q(x_0{+}a_2t_0,0)$, правой частью f на $\Delta MPQ\cap G_\infty$, граничным данным μ и коэффициентами α_2, β_2, γ_2 граничного условия (13) при $x=0$ для $t\in[0,t_0']$, $t_0'=t_0-x_0/a_1$.

Треугольники ΔMPQ и $\Delta Q'PP'$, где точки $Q'(0,t_0')$, $P'(a_1t_0{-}x_0,0)$, называются соответственно *характеристическим* и *критическим* для точки $M(x_0,t_0)$. Полученная интерпретация дает возможность применения третьего этапа метода "вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны" к задаче (10)–(12). В разделе 3.4 полуполоса $G = [0, d] \times [0, +\infty[$ представляется в виде расширяющихся по времени t прямоугольников $Q_n = [0, d] \times [0, d_{n+1}]$, $d_n = (n-1)d/(a_1 + a_2)$, $n = 1, 2, \ldots$ Для записи рекуррентных формул решения задачи (10)–(12) с помощью теоремы 3.1 множество G делится на прямоугольники $G_n = [0, d] \times [d_n, d_{n+1}]$, $n = 1, 2, \ldots,$ и характеристиками $x = a_1 t_n$, $x + a_2 t_n = d$ уравнения (10) на треугольники:

$$\Delta_{3n-2} = \{(x,t) : x > a_1 t_n, \, x + a_2 t_n < d, \, x \in]0, \, d[, \, t \in [d_n, \, d_{n+1}[\} ,$$

$$\Delta_{3n-1} = \{(x,t) : x \leq a_1 t_n, \, x \in [0, \, a_1 d_2], \, t \in [d_n, \, d_{n+1}]\} ,$$

$$\Delta_{3n} = \{(x,t) : x + a_2 t_n \geq d, x \in [a_1 d_2, d], t \in [d_n, d_{n+1}]\} , t_n = t - d_n, n = 1, 2, \ldots$$

Эти характеристики деления прямоугольников G_n мы называем *критическими.* Высота прямоугольников G_n равна $d/(a_1 + a_2)$, т. е. времени однократного прохождения струны прямой и обратной волнами одновременно.

Теорема 3.2 [5, 7, 12, 20]. *Пусть коэффициенты непрерывны:* $\alpha_{i2}, \beta_{i2}, \gamma_{i2} \in C[0, \infty[$, $i = 1, 2$, *и первые косые производные нехарактеристические:* $a_i \alpha_{ij} \neq (-1)^{i+1} \beta_{ij}$, $t \in [0, \infty[$, $i, j = 1, 2$. *Для того, чтобы смешанная задача (10)–(12) имела единственное устойчивое классическое решение* $u \in C^2(G)$, *достаточно требований гладкости:*

$$f \in C(G), \, \varphi \in C^2[0, \, d], \, \psi \in C^1[0, \, d], \, \mu_i \in C[0, \infty[, \, i = 1, \, 2, \tag{17}$$

$$\int\limits_{d_n}^{t} e^{b_i \tau} f \left(\big| d - |d - x - (-1)^i a_i (t - \tau)| \big| , \tau \right) d\tau \in C^1(G_n), i = 1, \, 2, n = 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

и условий согласования:

$$\alpha_{i2}(0)\{\alpha_{i1}[f(\hat{d}_i, 0) + (a_2 - a_1)\psi'(\hat{d}_i) + a_1 a_2 \varphi''(\hat{d}_i) - (b_2 + b_1)\psi(\hat{d}_i) - (a_1 b_2 - a_2 b_1)\varphi'(\hat{d}_i) -$$
$$- b_2 b_1 \varphi(\hat{d}_i)] + \beta_{i1}\psi'(\hat{d}_i) + \gamma_{i1}\psi(\hat{d}_i)\} + \beta_{i2}(0)[\alpha_{i1}\psi'(\hat{d}_i) + \beta_{i1}\varphi''(\hat{d}_i) + \gamma_{i1}\varphi'(\hat{d}_i)] +$$
$$+ \gamma_{i2}(0)[\alpha_{i1}\psi(\hat{d}_i) + \beta_{i1}\varphi'(\hat{d}_i) + \gamma_{i1}\varphi(\hat{d}_i)] = \mu_i(0), \, \hat{d}_i = (i-1)d, \, i = 1, \, 2; \tag{19}$$

и необходимо выполнение требований гладкости (17), условий согласования (19), а в случае $a_1 = a_2 > 0$ *ещё и требований гладкости (18). Таким классическим решением является функция:*

$$u_{3n-2}(x,t) = \frac{1}{a_1 + a_2} \Bigg(a_1 e^{-b_2 t_n} \varphi_n(x + a_2 t_n) + a_2 e^{-b_1 t_n} \varphi_n(x - a_1 t_n) +$$
$$+ e^{Bx - At_n} \int\limits_{x - a_1 t_n}^{x + a_2 t_n} e^{-Bs} \left[A\varphi_n(s) + \psi_n(s) \right] ds \Bigg) + F_n^{(1)}(x,t),$$

$$u_{3n-1}(x,t)=\Phi_{3n-1}(x,t)+F_n^{(1)}(x,t)+a_1e^{C_1t_n-D_1x}\int\limits_0^{t_n-\frac{x}{a_1}}e^{-D_1a_1\rho}\times$$

$$\times\left(a_1\int\limits_{d_n}^{d_n+\rho}\frac{P_{3n-1}(\nu)}{(a_1\alpha_{11}-\beta_{11})(a_1\alpha_{12}(\nu)-\beta_{12}(\nu))}\,e^{a_1\int\limits_{\nu}^{d_n+\rho}E_1(s)ds+b_1(\nu-d_n)}d\nu+\right.$$

$$\left.+\frac{b_2\varphi_n(0)+\psi_n(0)-a_2\varphi_n'(0)}{a_1+a_2}e^{a_1\int\limits_{d_n}^{d_n+\rho}E_1(s)ds}\right)d\rho,$$

$$u_{3n}(x,t)=\Phi_{3n}(x,t)+F_n^{(2)}(x,t)+a_2e^{C_2t_n-D_2(d-x)}\int\limits_0^{t_n-\frac{d-x}{a_2}}e^{-D_2a_1\rho}\times$$

$$\times\left(a_2\int\limits_{d_n}^{d_n+\rho}\frac{P_{3n}(\nu)}{(a_2\alpha_{21}+\beta_{21})(a_2\alpha_{22}(\nu)+\beta_{22}(\nu))}e^{a_2\int\limits_{\nu}^{d_n+\rho}E_2(s)ds+b_2(\nu-d_n)}\,d\nu+\right.$$

$$\left.+\frac{b_1\varphi_n(d)+\psi_n(d)+a_1\varphi_n'(d)}{a_1+a_2}e^{a_2\int\limits_{d_n}^{d_n+\rho}E_2(s)ds}\right)d\rho,\ n=1,\,2,...,$$

где u_{3n-k} *– сужения решения* u *на* Δ_{3n-k}, $k=0,\,1,\,2,$ *а рекуррентные начальные данные и вспомогательные функции задаются формулами:*

$$\varphi_1(x)=\varphi(x),\ \psi_1(x)=\psi(x),\ x\in[0,\,d],\ \varphi_k(x)=u_{3k+j-4}\big|_{t=d_k},$$

$$\psi_k(x)=\partial_t\,u_{3k+j-4}\big|_{t=d_k},\ x\in[ja_1d_2,\,(a_1+ja_2)d_2],\ j=0,\,1,\ k=2,\,3,...,$$

$$\Phi_{3n-j}(x,t)=\frac{e^{-b_{1+j}t_n}}{a_1+a_2}\Bigg\{a_{2-j}\varphi_n(x-(-1)^ja_{j+1}t_n)+a_{j+1}e^{B(x-(-1)^ja_{j+1}t_n)}\varphi_n(d-jd)-$$

$$-(-1)^je^{B(x-(-1)^ja_{j+1}t_n)}\int\limits_{d-jd}^{x-(-1)^ja_{j+1}t_n}e^{-Bs}\left[A\varphi_n(s)+\psi_n(s)\right]ds\Bigg\},\,j=0,\,1,$$

$$P_{3n-2+i}(t)=\mu_i(t)-\left\{\Gamma_i(t)\left(\Phi_{3n-2+i}(x,t)+F_n^{(i)}(x,t)\right)\right\}\Big|_{x=\hat{d}_i},\ i=1,\,2.$$

В этой теореме используются следующие дополнительные обозначения

$$C_i=\frac{(-1)^{i+1}b_i\beta_{i1}-a_i\gamma_{i1}}{a_i\alpha_{i1}+(-1)^i\beta_{i1}},D_i=\frac{b_i\alpha_{i1}-\gamma_{i1}}{a_i\alpha_{i1}+(-1)^i\beta_{i1}},$$

$$E_i(t)=\frac{b_i\alpha_{i2}(t)-\gamma_{i2}(t)}{a_i\alpha_{i2}(t)+(-1)^i\beta_{i2}(t)},p_i(x)=\hat{d}_i-(-1)^ix,$$

$$F_n^{(i)}(x,t)=\frac{1}{a_1+a_2}e^{Bx-At}\int\limits_{d_n}^{t}e^{A\tau}\int\limits_{p_i(x)-a_i(t-\tau)}^{p_i(x)+a_{3-i}(t-\tau)}e^{-Bp_i(s)}f(p_i(|s|),\tau)ds\,d\tau, i=1,\,2.$$

В теоремах 2.2 и 3.2 рекуррентные формулы классических решений и критерий корректности смешанных задач (1)–(3) и (10)–(12) для ограниченной струны выводятся соответственно из явных формул классических решений и критерия корректности указанных выше вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны, которые имеются в теоремах 2.1 и 3.1. В замечаниях 2.1 и 3.1 анализируются требования гладкости на правые части f уравнений из теорем 2.1 и 3.1. Если функция f не зависит от x или t, то в теореме 3.1 (теореме 2.1) непрерывность f соответственно по t или x необходима и достаточна для f при любых $a_1>0,\ a_2>0\,(a>0)$. Если же f непрерывна и зависит от x и t, то в теореме 3.2 (теореме 2.2) при $a_2>0$ достаточное и при $a_1=a_2>0$ необходимое (необходимые и достаточные) требования принадлежности интегралов из (16) (из (8)) множеству $C^1(G_\infty)$ эквивалентно их принадлежности множествам $C^{(0,1)}(G_\infty)$ или $C^{(1,0)}(G_\infty)$, где $C^{(0,1)}(\Omega)$ – множество непрерывных по x и непрерывно дифференцируемых по t и $C^{(1,0)}(\Omega)$ – множество непрерывно дифференцируемых по x и непрерывных по t функций на Ω. Это вытекает из равенств

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\int\limits_0^t e^{b_i\tau}f(|x+(-1)^i a_i(t-\tau)|,\tau)d\tau\Big)=$$

$$=\frac{(-1)^i}{a_i}\Big[\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int\limits_0^t e^{b_i\tau}f(|x+(-1)^i a_i(t-\tau)|,\tau)d\tau\Big)-e^{b_it}f(x,t)\Big],\ i=1,\,2,$$

которые сначала доказываются для функций $f\in C^1(G_\infty)$ и затем предельным переходом по f распространяются на $f\in C(G_\infty)$, удовлетворяющие требованиям (16). Если правая часть f уравнения (10) зависит от обеих переменных x и t, то для выполнения необходимого и достаточного требования гладкости $f\in C(G_\infty)$ и достаточных требований (16) достаточно требования $f\in C^{(0,1)}(G_\infty)$, т. е. непрерывной дифференцируемости f по t. Отсюда при $a_1=a_2=a,\ b_1=b_2=0$ получается часть замечания 2.1. Замечания 2.5 и 3.5 аналогично замечаниям 2.1 и 3.1 посвящены эквивалентности требований гладкости (9) и (18) на функции $f\in C(G_n)$ требованиям принадлежности интегралов из (9) и (18) множествам $C^{(0,1)}(G_n)$ или $C^{(1,0)}(G_n)$, $n=1,\,2,\ldots$ В замечаниях 2.5 и 3.5 тоже поясняются требования гладкости (9) и (18).

Условие (18) на $\Delta_{3n-2} \cup \Delta_{3n-1}$ эквивалентно условию

$$\int\limits_{d_n}^{t} e^{b_i \tau} \left(\left|x + (-1)^i a_i(t-\tau)\right|, \tau\right) d\tau \in C^1(\Delta_{3n-2} \cup \Delta_{3n-1}),\ i = 1,\ 2, \tag{20}$$

так как $d - |d - x - (-1)^i a_i(t-\tau)| = x + (-1)^i a_i(t-\tau),\ i = 1, 2,$ на $\Delta_{3n-2} \cup \Delta_{3n-1},\ n = 1, 2, \ldots$ В (20) модуль убирается на Δ_{3n-2}, так как $0 < x + (-1)^i a_i(t-\tau) < d,\ i = 1, 2,$ на Δ_{3n-2}, и на Δ_{3n-1} при $i = 2$, так как $0 \le x + a_2(t-\tau) \le d$ на Δ_{3n-1}. Внешний модуль в (18) убирается на Δ_{3n}, так как $0 \le d - x + a_1(t-\tau) \le d$ и $-a_2 d_2 \le d - x - a_2(t-\tau) \le a_2 d_2$ на Δ_{3n}. Отсюда при $a_1 = a_2 = a,\ b_1 = b_2 = 0$ имеем часть замечания 2.5.

Пары замечаний 2.2, 3.4 и 2.7, 3.6 посвящены проверке решений из теорем 2.1, 3.1 и 2.2, 3.2 смешанных задач соответственно для полуограниченной и ограниченной струны на персональном компьютере в системе Mathematica 10, которые изложены соответственно в приложениях A, C и B, D. Сначала выражения решений подставляются в уравнения, начальные и граничные условия при дополнительном условии непрерывной дифференцируемости функций f и затем результаты проверки распространяются предельным переходом по f на непрерывные функции f, удовлетворяющие соответствующим интегральным требованиям гладкости (8), (16) или (9), (18). Ввиду замечания 2.3 для уравнения (1) при $f = 0$ достаточные требования гладкости и условия согласования на φ, ψ и μ и решения первой вспомогательной смешанной задачи из теоремы 2.1 настоящей диссертации совпадают с требованиями гладкости, условиями согласования и решениями теоремы 1 работы С.Н. Барановской и Н.И. Юрчука.[1]

В замечании 2.4 из теоремы 2.1 предельным переходом в классических решениях первой вспомогательной смешанной задачи при $|\alpha(t)| + |\beta(t)| = 0$, $\gamma(t) \ne 0,\ t \in [0, \infty[$, получены классические решения первой смешанной задачи в G_∞ для уравнения (1) при начальных условиях (2) и граничном условии $u|_{x=0} = \vartheta(t),\ \vartheta(t) = \mu(t)/\gamma(t),\ t \ge 0$. Для последней задачи также указаны необходимые и достаточные требования гладкости и условия согласования для $f, \varphi, \psi, \vartheta$. В замечании 2.6 из этих результатов согласно методу "вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны" для уравнения (1) в G при начальных условиях (2) и граничных условиях

$$u|_{x=0} = \vartheta_1(t) = \mu_1(t)/\gamma_1(t),\ u|_{x=d} = \vartheta_2(t) = \mu_2(t)/\gamma_2(t),\ t \ge 0,$$

[1]Барановская, С.Н. Смешанная задача для уравнения колебания струны с зависящей от времени косой производной в краевом условии / С.Н. Барановская, Н.И. Юрчук // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1188–1191.

найдены рекуррентные формулы единственного классического решения:

$$u_{3n-2}(x,t)=\frac{\varphi_n(x+at_n)+\varphi_n(x-at_n)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at_n}^{x+at_n}\psi_n(\nu)d\nu+F_n^{(1)}(x,t),\ (x,t)\in\Delta_{3n-2},$$

$$u_{3n-1}(x,t)=\frac{\varphi_n(x+at_n)-\varphi_n(at_n-x)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{at_n-x}^{x+at_n}\psi_n(\nu)d\nu+$$

$$+F_n^{(1)}(x,t)+\vartheta_1\left(t-\frac{x}{a}\right)-\frac{1}{a}\int\limits_{d_n}^{t-\frac{x}{a}}\int\limits_{0}^{a(t-\tau)-x}f(s,\tau)dsd\tau,\ (x,t)\in\Delta_{3n-1},$$

$$u_{3n}(x,t)=\frac{\varphi_n(x-at_n)-\varphi_n(2d-x-at_n)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at_n}^{2d-x-at_n}\psi_n(\nu)d\nu+$$

$$+F_n^{(2)}(x,t)+\vartheta_2\left(t-\frac{d-x}{a}\right)-\frac{1}{a}\int\limits_{d_n}^{t-\frac{d-x}{a}}\int\limits_{0}^{a(t-\tau)+x-d}f(d-s,\tau)dsd\tau,\ (x,t)\in\Delta_{3n},$$

где функции φ_n, ψ_n, $F_n^{(i)}$ из теоремы 2.2, $t_n=t-d_n$, $n=1,2,...,$ и так же необходимые и достаточные требования гладкости и условия согласования:

$$f\in C(G),\ \varphi\in C^2[0,d],\ \psi\in C^1[0,d],\ \vartheta_i\in C^2[0,\infty[,\ i=1,2,$$

$$\int_{d_n}^{t}f(|d-|d-x-(-1)^i a(t-\tau)||,\tau)\,d\tau\in C^1(G_n),\ i=1,2,\ n=1,2,...,$$

$$\varphi(\hat{d}_i)=\vartheta_i(0),\ \psi(\hat{d}_i)=\vartheta_i'(0),\ a^2\varphi''(\hat{d}_i)+f(\hat{d}_i,0)=\vartheta_i''(0),\ i=1,2.$$

В замечании 3.2 говорится о том, что если $a_1=a_2=a$ и $b_1=b_2=0$, то $A=B=0$ и формула решений из теоремы 3.1 в $G_-=\{(x,t)\in G_\infty : x>a_1t, t>0\}$ является известной полной формулой Даламбера (Эйлера) решения задачи Коши. Согласно замечанию 3.3 дифференциальное выражение с постоянными коэффициентами $\partial_{tt}u+b\partial_{xt}u-a\partial_{xx}u+c\partial_t u+d\partial_x u+ru$, где $r=(ac^2+bcd-d^2)/(b^2+4a)$, $a>0$, представимо в виде левой части факторизованного уравнения (10) с коэффициентами $a_i=(\sqrt{b^2+4a}-(-1)^i b)/2$, $b_i=(a_ic+(-1)^i d)/(a_1+a_2)$, $i=1,2$.

Автор благодарит своего научного руководителя Фёдора Егоровича Ломовцева за постановку задач, помощь, поддержку и внимание к работе, а ещё профессоров Николая Иосифовича Юрчука и Виктора Ивановича Бахтина.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. В диссертации методом характеристик и предложенным Ломовцевым Ф.Е. методом "вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны" исследована корректность по Адамару (однозначная, устойчивая везде разрешимость) во множестве классических решений двух линейных смешанных задач для простейшего и более общего факторизованного неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при нехарактеристических нестационарных первых и полунестационарных вторых косых производных в граничных условиях соответственно, для которых получены:

– явные рекуррентные формулы классических решений, для записи которых множества задания смешанных задач разбиваются на прямоугольники с высотой, равной времени однократного прохождения струны прямой и обратной волнами одновременно, и каждый прямоугольник – критическими характеристиками на три треугольника [5-7, 11, 12, 20];

– необходимые и достаточные требования гладкости на правую часть уравнения, начальные и граничные данные и условия согласования граничных условий с начальными условиями и уравнением, которые обеспечивают корректность по Адамару во множестве классических решений [4-12, 17, 19].

2. Доказательство формул классических решений и необходимых и достаточных условий корректности двух новых смешанных задач:

– для простейшего неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при нехарактеристических нестационарных первых косых производных в граничных условиях [1, 2, 11, 14-16, 18];

– для более общего неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при нехарактеристических полунестационарных вторых косых производных в граничных условиях [3-7, 12, 19, 20].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертационного исследования рекомендуется использовать в учебном процессе при чтении лекций и проведении практических и семинарских занятий по некоторым общим и специальным математическим дисциплинам, а также в исследованиях корректности и поиске формул решений смешанных задач для гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных при нестационарных пространственных граничных условиях более общего вида с зависящими от времени коэффициентами.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных рецензируемых журналах

1. Новиков, Е.Н. Метод Дюамеля решения неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с косой производной в нестационарном граничном условии / Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // Вестник БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2012. – № 1. – С. 83–87.

2. Новиков, Е.Н. Необходимые и достаточные условия колебаний ограниченной струны при косых производных в граничных условиях / Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 1. – С. 126–129.

3. Новиков, Е.Н. Классические решения неоднородного уравнения колебаний полуограниченной струны с полунестационарной второй косой производной в граничном условии / Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // Веснік Віцебскага дзяржаунага універсітэта. – 2014. – № 2 (80). – С. 5–12.

4. Новиков, Е.Н. Неоднородное факторизованное гиперболическое уравнение второго порядка в четверти плоскости при полунестационарной второй косой производной в граничном условии / Е.И. Моисеев, Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // Доклады Академии наук. – 2014. – Т. 459. – № 5. – С. 544–549.

5. Новиков, Е.Н. Решение смешанной задачи для факторизованного уравнения колебаний струны при полунестационарных факторизованных вторых косых производных в граничных условиях / Ф.Е Ломовцев, Е.Н. Новиков // Веснік Віцебскага дзяржаунага універсітэта. – 2015. – № 2-3 (86-87). – С. 15–21.

6. Новиков, Е.Н. Классические решения неоднородного факторизованного гиперболического уравнения второго порядка в четверти плоскости при полунестационарной второй косой производной в граничном условии / Ф.Е Ломовцев, Е.Н. Новиков // Веснік Віцебскага дзяржаунага універсітэта. – 2015. – № 4 (88). – С. 5–11.

7. Новиков, Е.Н. Факторизованное уравнение колебаний конечной струны при нестационарных вторых косых производных на концах / Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52, № 6. – С. 803–810.

8. Новиков, Е.Н. Необходимые условия для существования классических решений уравнения колебаний полуограниченной струны / Н.И. Юрчук, Е.Н. Новиков // Весці НАН Беларусі. – 2016. – Сер. фіз.-мат. навук. – № 4. – С. 116–120.

Статьи в материалах математических школ

9. Новиков, Е.Н. Необходимые и достаточные условия колебаний полуограниченной струны со второй производной по времени в граничном условии / Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // XXVII Воронежская математическая школа «Современные методы теории краевых задач», Воронеж, 6 – 11 мая 2013 г./ Материалы ВВМШ "Понтрягинские чтения – XXIV"– Воронеж: ВГУ. – 2013. – С. 121–123.

10. Новиков, Е.Н. О необходимых условиях на правую часть уравнения колебаний ограниченной струны при первой косой производной в нестационарных граничных условиях / Ф.Е Ломовцев, Е.Н. Новиков // XXVIII Воронежская математическая школа «Современные методы теории краевых задач», Воронеж, 3 – 9 мая 2014 г./ Материалы ВВМШ "Понтрягинские чтения – XXV" – Воронеж: ИПЦ «Научная книга». – 2014. – С. 109–112.

11. Новиков, Е.Н. Смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при первых косых производных в нестационарных граничных условиях / Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // Современные методы теории функций и смежные проблемы / Материалы Международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа (27 января – 2 февраля 2015 г.). – Воронеж: Издательский дом ВГУ. – 2015. – С. 73–76.

12. Новиков, Е.Н. Классические решения неоднородного факторизованного уравнения колебаний ограниченной струны при вторых факторизованных косых производных / Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // XXIX Воронежская математическая школа «Современные методы теории краевых задач», Воронеж, 3 – 9 мая 2015 г./ Материалы ВВМШ "Понтрягинские чтения – XXVI" – Воронеж: ВГУ. – 2015. – С. 136–139.

13. Новиков, Е.Н. Решение без продолжения данных первой смешанной задачи для уравнения колебаний ограниченной струны / Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // Современные методы теории функций и смежные проблемы / Материалы Международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа (25 – 31 января 2016 г.). – Воронеж: Издательско-полиграфичесский центр "Научная книга". – 2016. – С. 279–282.

Тезисы докладов научных конференций

14. Новиков, Е.Н. Необходимые и достаточные условия на правую часть уравнения колебаний полуограниченной струны с нестационарной косой производной в граничном условии / Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // Еругинские чтения – 2011 : тезисы докладов XIV Международной математической конференции по дифференциальным уравнениям, Новополоцк, 12 – 14 мая 2011 г. /

Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк. – 2011. – С. 105.

15. Новиков, Е.Н. Формула сильных решений смешанной задачи для уравнения колебаний ограниченной струны с зависящими от времени косыми производными в граничных условиях / Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений : тезисы докладов международной конференции, Минск, 12 – 17 сентября 2011 г. / ИМ НАН Беларуси. – Минск. – 2011. – С. 95.

16. Новиков, Е.Н. О классических решениях одной смешанной задачи для уравнения колебаний ограниченной струны с нестационарными косыми производными/ Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // Третья международная научная конференция «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения» : тезисы докладов международной конференции, Брест, 17 – 22 сентября 2012 г. / Брест. гос. ун-т имени А.С. Пушкина – Брест. – 2012. – С. 68.

17. Новиков, Е.Н. Необходимые условия на правые части уравнения колебаний ограниченной струны и данные граничных условий с зависящими от времени косыми производными / Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // Тезисы докладов Международной научной конференции "XI Белорусская математическая конференция". – Минск, 5 – 9 ноября 2012 г. – С. 77.

18. Новиков, Е.Н. Смешанная задача для неоднородного уравнения колебаний струны со второй производной по времени в нестационарном граничном условии / Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // Еругинские чтения – 2013 : тезисы докладов XV Международной математической конференции по дифференциальным уравнениям, Гродно, 13 – 16 мая 2013 г. / ИМ НАН Беларуси. – Минск, 2013. – Ч. 2. – С. 16.

19. Новиков, Е.Н. Смешанная задача для факторизованного гиперболического уравнения второго порядка в четверти плоскости при полунестационарной второй факторизованной косой производной / Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // Еругинские чтения – 2014 : тезисы докладов XVI Международной математической конференции по дифференциальным уравнениям, Новополоцк, 20 – 22 мая 2014 г. / ИМ НАН Беларуси. – Минск. – 2014. – Ч. 2. – С. 18–19.

20. Новиков, Е.Н. Необходимые и достаточные требования гладкости и условия согласования вынужденных плоских колебаний в упругих движущихся средах / Ф.Е. Ломовцев, Е.Н. Новиков // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений : тезисы докладов международной конференции, Минск, 14 – 19 сентября 2015 г. / ИМ НАН Беларуси. – Минск. – 2015. – С. 54–56.

РЭЗЮМЭ

Новікаў Яўгеній Мікалаевіч

Змешаныя задачы для ўраўнення вымушаных ваганняў абмежаванай струны пры нестацыянарных межавых умовах з першай і другой касымі вытворнымі

Ключавыя словы. Змешаная задача, ураўненне ваганняў струны, нестацыянарная краявая ўмова, нехарактарыстычная касая вытворная.

Аб'ект і прадмет даследвання. *Аб'ектам даследвання* з'яўляюцца лінейныя змешаныя задачы для неаднароднага ўраўнення ваганняў паўабмежаванай і абмежаванай струны пры залежных ад часу каэфіцыентах у межавых умовах, якія змяшчаюць усе нехарактарыстычная частковыя вытворныя першага парадку і некаторыя частковыя вытворныя другога парадку. *Прадмет даследвання* - існаванне, адзінасць і яўныя формулы класічных рашэнняў, неабходныя і дастатковыя ўмовы на зыходныя даныя лінейных змешаных задач для неаднароднага ўраўнення ваганняў струны пры нестацыянарных межавых умовах з нехарактарыстычнымі першымі і другімі касымі вытворнымі.

Мэта работы. Знаходжанне класічных рашэнняў у яўным выглядзе і выяўленне неабходных і дастатковых умоў на зыходныя даныя (правыя часткі ўраўненняў, межавыя даныя і пачатковыя даныя) для карэктнай вырашальнасці па Адамару лінейных змешаных задач для вымушаных ваганняў абмежаванай струны пры нестацыянарных межавых умовах з нехарактарыстычнымі першымі і другімі касымі вытворнымі.

Метады даследвання. Метады характарыстык і Ломаўцава Ф.Я. "дапаможных змешаных задач для паўабмежаванай струны".

Атрыманыя вынікі і іх навізна. Знойдзеныя рэкурэнтныя формулы класічных рашэнняў і неабходныя і дастатковыя ўмовы карэктнасці двух лінейных змешаных задач для неаднароднага ўраўнення ваганняў абмежаванай струны пры нестацыянарных нехарактарыстычных першых і другіх касых вытворных ў межавых умовах. *Навізна* вынікаў дысертацыі заключаецца ў яўных аналітычных формулах рашэнняў і неабходных і дастатковых умовах карэктнасці гэтых змешаных задач.

Рэкамендацыі па выкарыстанню. Вынікі дысертацыйнага даследавання рэкамендуецца выкарыстоўваць у навучальным працэсе, даследаваннях карэктнасці і пошуку яўных формул рашэнняў змешаных задач для гіпербалічных дыферэнцыяльных ўраўненняў у частковых вытворных пры больш агульных нестацыянарных прасторавых межавых умовах.

РЕЗЮМЕ

Новиков Евгений Николаевич

Смешанные задачи для уравнения вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с первой и второй косыми производными

Ключевые слова. Смешанная задача, уравнение колебаний струны, нестационарное краевое условие, нехарактеристическая косая производная.

Объект и предмет исследования. *Объектом исследования* являются линейные смешанные задачи для неоднородного уравнения колебаний полуограниченной и ограниченной струны при зависящих от времени коэффициентах в граничных условиях, содержащих все нехарактеристические частные производные первого порядка и некоторые частные производные второго порядка. *Предмет исследования* – существование, единственность и явные формулы классических решений, необходимые и достаточные условия на исходные данные линейных смешанных задач для неоднородного уравнения колебаний струны при нестационарных граничных условиях с нехарактеристическими первыми и вторыми косыми производными.

Цель работы. Нахождение классических решений в явном виде и выявление необходимых и достаточных условий на исходные данные (правые части уравнений, граничные данные и начальные данные) для корректной разрешимости по Адамару линейных смешанных задач для вынужденных колебаний ограниченной струны при нестационарных граничных условиях с нехарактеристическими первыми и вторыми косыми производными.

Методы исследования. Методы характеристик и Ломовцева Ф.Е. "вспомогательных смешанных задач для полуограниченной струны".

Полученные результаты и их новизна. Найдены рекуррентные формулы классических решений и необходимые и достаточные условия корректности двух линейных смешанных задач для неоднородного уравнения колебаний ограниченной струны при нестационарных нехарактеристических первых и вторых косых производных в граничных условиях. *Новизна* результатов диссертации заключается в явных аналитических формулах решений и необходимых и достаточных условиях корректности этих смешанных задач.

Рекомендации по применению. Результаты диссертационного исследования рекомендуется использовать в учебном процессе, исследованиях корректности и поиске явных формул решений смешанных задач для гиперболических дифференциальных уравнений в частных производных при более общих нестационарных пространственных граничных условиях.

SUMMARY

Novikov Evgenyi Nikolaevich

Mixed problems for the forced oscillation equation of a bounded string in the unsteady boundary conditions with the first and second oblique derivatives

Keywords: Mixed problem, the string oscillation equation, unsteady boundary condition, noncharacteristic oblique derivative.

Object and subject of research. *The objects of research* are linear mixed problem for inhomogeneous equation of semi-bounded and bounded string oscillations with time-dependent coefficients in the boundary conditions, containing noncharacteristic all first order partial derivatives and some second order partial derivatives. *The subject of research* is the existence, uniqueness and explicit formulas of classic solutions, the necessary and sufficient conditions on the original data of linear mixed problems for inhomogeneous equation of string oscillations with unsteady boundary conditions with noncharacteristic first and second oblique derivatives.

A purpose of work. Finding classical solutions explicitly and defining of necessary and sufficient conditions on the original data (the right-hand sides of the equations, the boundary data and the initial data) for the correct Hadamard's solvability of the linear mixed problems for the forced oscillations of a bounded string with unsteady boundary conditions with noncharacteristic first and second oblique derivatives.

Methods of research. The characteristic method and method of Lomovtsev F. E. "auxiliary mixed problems for a semi-bounded string".

The obtained results and their novelty. We found the recurrence formulas of classical solutions and the necessary and sufficient conditions for the correctness of two linear mixed problems for inhomogeneous equation of string oscillations of a bounded string with noncharacteristic first and second oblique derivatives in the boundary conditions. *The novelty* of the thesis results lies in the explicit analytical formulas and the necessary and sufficient conditions for the correctness of these mixed problems.

Recommendations for use. The results of the research recommended in the learning process, research correctness and finding explicit formulas for solutions of mixed problems for hyperbolic partial differential equations with more general unsteady spatial boundary conditions.

Подписано в печать 22 июня 2017
Формат $60 \times 84/16$
Усл. печ. л. 1,62 Уч.-изд. л. 1,46
Тираж 60 экз. Заказ № 2

Отпечатано на ризографе Института математики НАН Беларуси.
Издатель и полиграфическое исполнение:
Институт математики НАН Беларуси.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распростанителя печатных изданий № 1/257 от 2 апреля 2014 г.
220072. Минск, Сурганова, 11.